

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅲ 2018 寒野善博

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



演習問題 (連続最適化編)

問 1 次の関数の停留点をすべて求めよ。また、それらが極小点, 極大点, 鞍点のいずれであるかを答えよ。

1) $f(\mathbf{x}) = x_1^3 - 2x_1^2 + x_1^2x_2 + 2x_2^2$.

2) $f(\mathbf{x}) = x_1^4 - 4x_1x_2 + x_2^2$.

問 2 関数

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^4 - 2x_1^2x_2 + 4x_2^2 + 8x_1 + 8x_2$$

の無制約最小化問題に, ニュートン法を適用する。初期解を $\mathbf{x}_0 = (0, 1)^\top$ とし, ステップ幅は常に $\alpha_k = 1$ とする。このとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ および $f(\mathbf{x}_1)$ を求めよ。

問 3 関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$$

の無制約最小化問題に, 準ニュートン法を適用する。初期解を $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^\top$ とし, $H_0 = I$ とおいて BFGS 公式の H 公式を適用する。また, ステップ幅は常に $\alpha_k = 1$ とする。このとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を求めよ。

問 4 次の最適化問題の最適解を, ラグランジュ乗数法を用いて求めよ。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & 2x_1 + x_2^2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{aligned}$$

問 5 2次計画問題

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top Q\mathbf{x} + \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & G\mathbf{x} \leq \mathbf{h} \end{aligned}$$

に対する KKT 条件を書き下せ (Q は半正定値対称行列である)。

問 6 次の関数が凸関数であるかを調べよ。

1) $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

2) $f(\mathbf{x}) = x_1^2x_2^2 + 4x_2^2$.

3) $f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

問 7 次の集合が凸集合であるかを調べよ.

1) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 \leq 0\}$.

2) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

3) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 \geq x_3^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

問 8 次の最適化問題を, 線形計画問題の等式標準形に直せ.

(a)
$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & |3x_1 + 2| + |4x_2 - 5| \\ \text{subject to} \quad & 7x_1 + x_2 = 6. \end{aligned}$$

問 9 最適化問題

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 5x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1^2 + 3x_1 + 4x_2^4 \leq 10 \end{aligned}$$

を, いくつかの補助変数を用いて, 問題

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top Q_0 \mathbf{x} + \mathbf{p}_0^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top Q_l \mathbf{x} + \mathbf{p}_l^\top \mathbf{x} + r_l \leq 0, \quad l = 1, \dots, m \end{aligned}$$

の形式に直せ. ただし, Q_0, Q_1, \dots, Q_m は半正定値対称行列とする.

-
- 数値計算が必要な課題 (問 2 や問 3) では, 分数を小数に直し適当な桁で四捨五入してよい.

(以上)