クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

第12講 行列の対角化

12-5 (再び)行列関数

行列のべき乗

行列 A が $A = PDP^{-1}$ と対角化されるとする. この時

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

さらに行列の指数関数も定義(テイラー展開)から

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PD^nP^{-1} = P[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n]P^{-1} = Pe^DP$$

ケーリー・ハミルトンの定理

$n \times n$ の正方行列 A の固有多項式(特性多項式) $\Phi_A(x) = \det(A - xE)$ は x の n 次の多項式である

$n = 1, 2$ については、固有多項式を書き下すことで $\Phi_A(A) = O$ を確認できる

行列 A が $A = PDP^{-1}$ と対角化される時、一般の n についてケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことを示せ

(注: $\Phi_A(x) = \det(A - xE)$ の右辺の x を行列 A で置き換えると $\det(A - AE) = \det O = 0$ となるが、これはケーリー・ハミルトンの定理の証明にはなっていない。この計算では結果は行列ではなくスカラーだが、示したいのは正方行列の関係式 $\Phi_A(A) = O$ である)

12-6 二次形式

n 個の実変数 $\mathbf{x} = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ と n^2 の実係数 a_{ij} を持つ2次の同次多項式

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i \neq j} a_{ij}x_ix_j$$

を考える. 一般性を失うことなく $a_{ij} = a_{ji}$ としてよい. すなわち行列 $A = (a_{ij})$ は実対称行列であるとする. このような多項式を2次形式という.

この2次形式は行列 A およびベクトル $\mathbf{x}$ を用いて

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$$

と書かれる.

例

2次形式 $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ を行列とベクトルの積で書くと

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ として $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ と書かれる.

行列 A の固有値は1, 3であり, 対応する固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 1 : \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 3 : \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

となる.

```
A=[2 1;1 2]
```

```
A = 2×2
     2     1
     1     2
```

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 2×2
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
D = 2×2
     1     0
     0     3
```

言い換えると, 行列 A は直交行列は

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

をもちいて

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

と対角化される

```
P=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2);1/sqrt(2) 1/sqrt(2) ]
```

```
P = 2×2
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
```

```
inv(P)
```

```
ans = 2×2
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
```

```
P\A*P
```

```
ans = 2×2
    1.0000    0.0000
         0    3.0000
```

ここで $(P^{-1})^T = P$ をもちいて

$$\mathbf{x}^t Ax = \mathbf{x}^t(PP^{-1})A(PP^{-1})\mathbf{x} = (P^{-1}\mathbf{x})^t P^{-1}AP(P^{-1}\mathbf{x})$$

と書き直してみよう. また,

$$P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{bmatrix}$$

であるから

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{bmatrix}$$

とすれば

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{u}) = u^2 + 3v^2$$

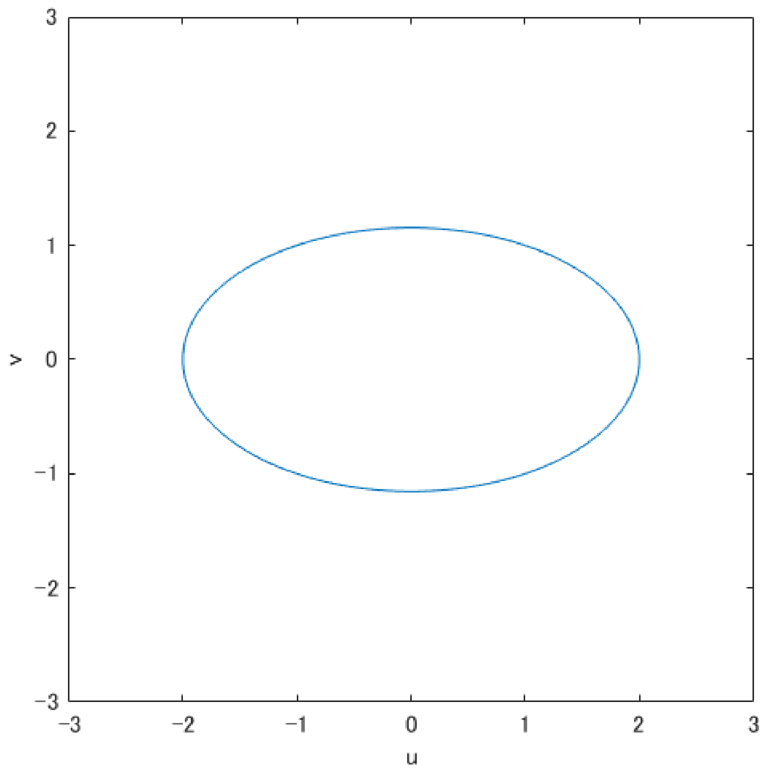
と変換される. このように非対角成分がない形を実2次形式の標準形という

$$g(\mathbf{u}) = u^2 + 3v^2 = a^2$$

と書けば, この式は (u, v) 空間で長軸の長さ短軸の長さ $2a/\sqrt{3}$ の楕円を表している. また, もとの (x, y) 空間ではこの楕円を $\pi/4$ だけ傾けたものである.

まず (u, v) 空間で描いてみよう

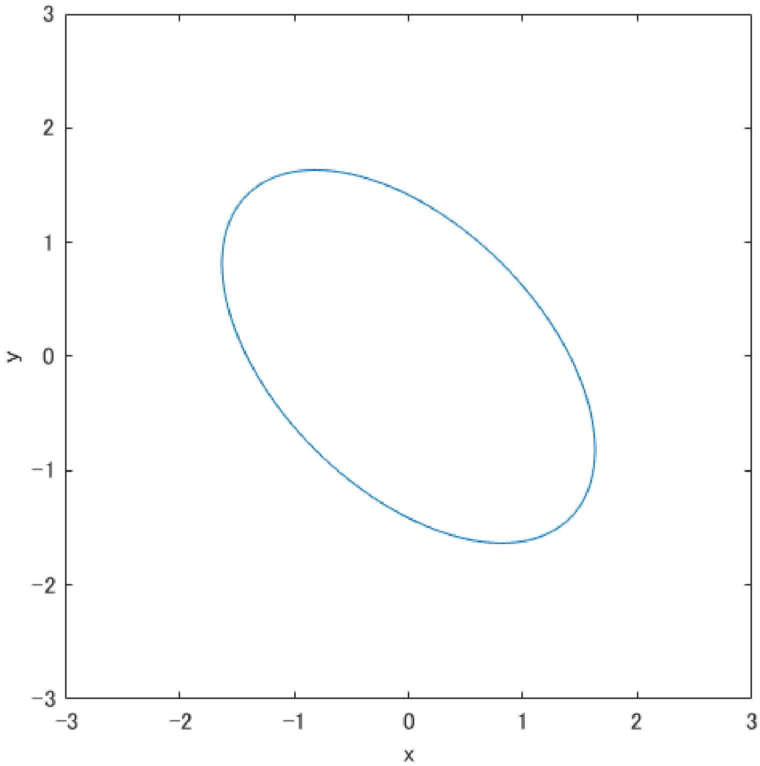
```
g= @(x,y) x.^2 + 3*y.^2 - 4;
fimplicit(g,[-3 3 -3 3])
xlabel('u');
ylabel('v');
daspect([1 1 1])
```



(x, y) 空間で描けば

```
f= @(x,y) 2.*x.^2 + 2.*y.^2 +2.*x.*y- 4;
fimplicit(f,[-3 3 -3 3])
```

```
ylabel('y');
daspect([1 1 1])
```



例題

例題1 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. また, それを用いて A^2 , A^3 を求めよ

例題2 次の実2次形式の標準形をもとめよ

(1) $4x^2 - 10xy + 4y^2$ (2) $xy + yz + zx$

例題3 実2次形式 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ を標準形に変換し, その結果から3次元曲面 $z = f(x, y)$ の形, および, 2次元曲線 $f(x, y) = a$ の形を予測せよ. MATLABで実際にプロットしてみて, その予測を確かめよ