第12講 行列の対角化

12-3 行列の対角化

行列 $A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{bmatrix}$ を考える

```
A = [ 0.8 0.3; 0.2 0.7 ]
```

```
A = 2×2
    0.8000    0.3000
    0.2000    0.7000
```

```
syms x
det(A - x * eye(2))
```

ans =
$\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}+x^2$

$|A-\lambda E|=0$ を解いて、固有値 $\lambda=1,\frac{1}{2}$ を得る. また, $(A-E)x=0$, $(A-\frac{1}{2}E)x=0$ を解くことで, 固有ベクトル $\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ を得る

MATLAB では eig() により, 固有値と固有ベクトルを計算できる

```
[P, D] = eig(A)
```

```
P = 2×2
    0.8321   -0.7071
    0.5547    0.7071
D = 2×2
    1.0000         0
         0    0.5000
```

P は(列)固有ベクトルを横にならべたもの, D は固有値を対角成分にならべた対角行列である

MATLAB の返す固有ベクトルは, 長さ1に規格化されていることに注意. また、 v が固有ベクトルならば $-v$ も同じ固有値に属する固有ベクトルである

12-4 固有ベクトル

固有ベクトルに A を掛けると, 方向は同じで長さが変わる. (固有値が負の場合には向きが反転する)

```
v = P(:,1)
```

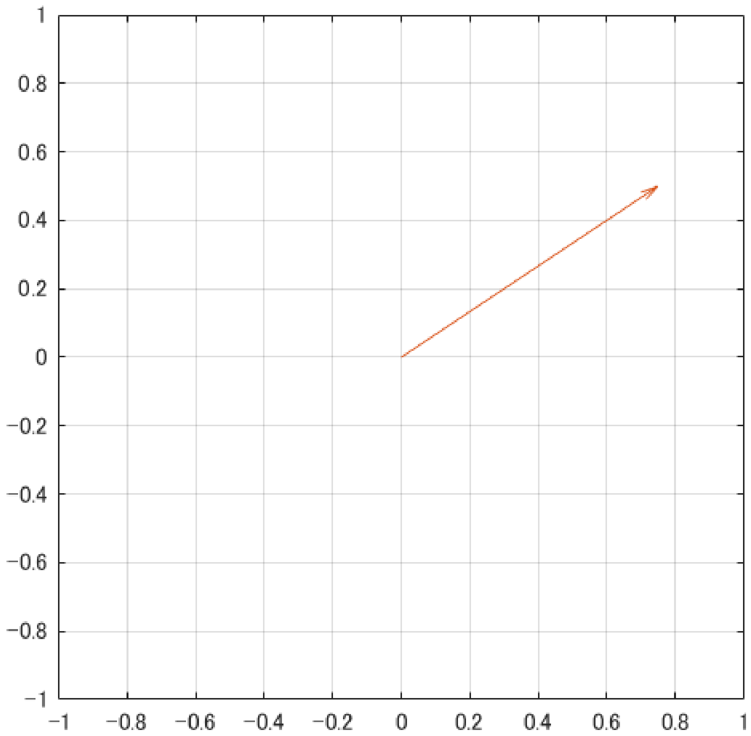
```
v = 2×1
    0.8321
    0.5547
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
```

```
    0.8321
    0.5547
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



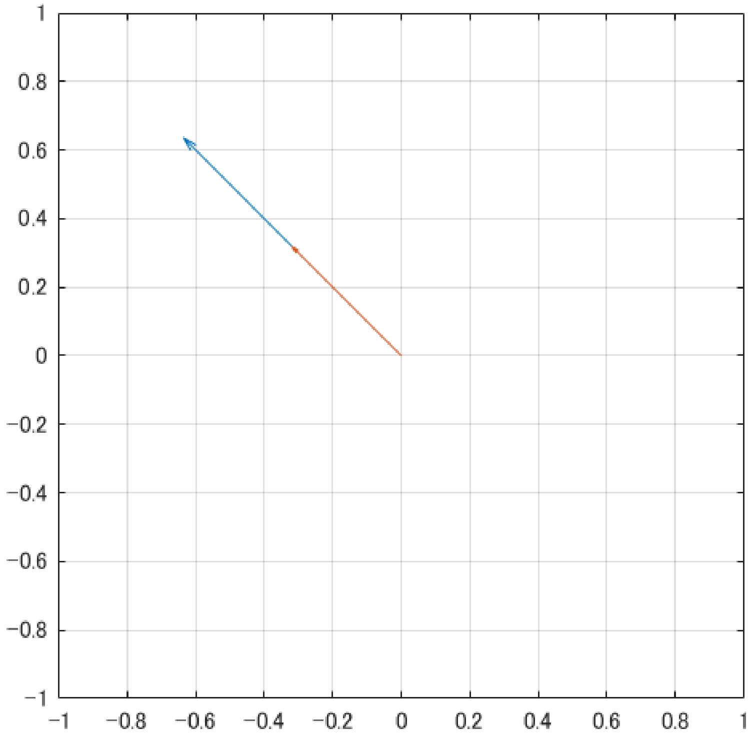

```
v = P(:,2)
```

```
v = 2×1
   -0.7071
    0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.3536
    0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



いろいろな方向のベクトルを A で変換してみる

固有ベクトルの場合だけ, 変換後のベクトルは平行になる

x軸からの角度 $\theta = 0$

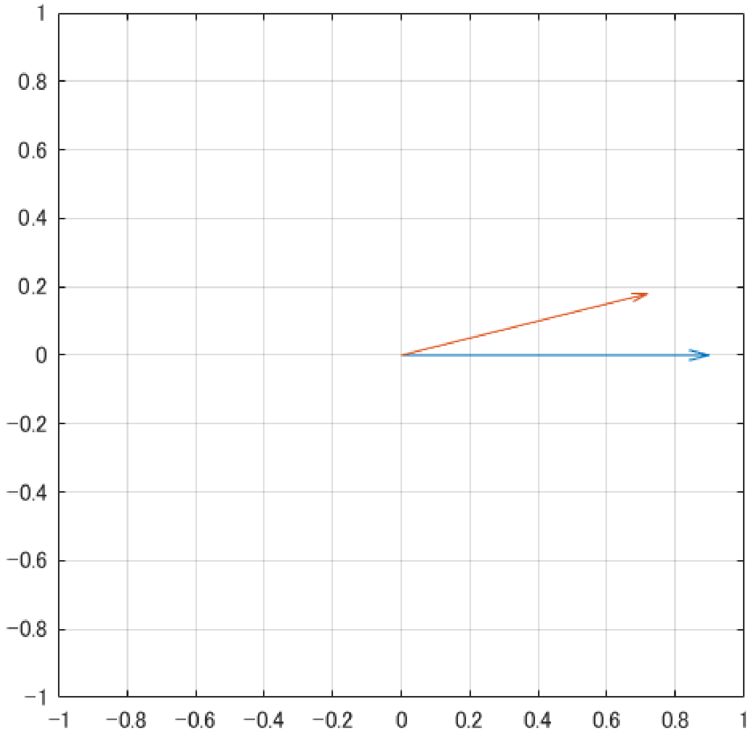
```
v = [1; 0]
```

```
v = 2×1
     1
     0
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.8000
    0.2000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi/8$

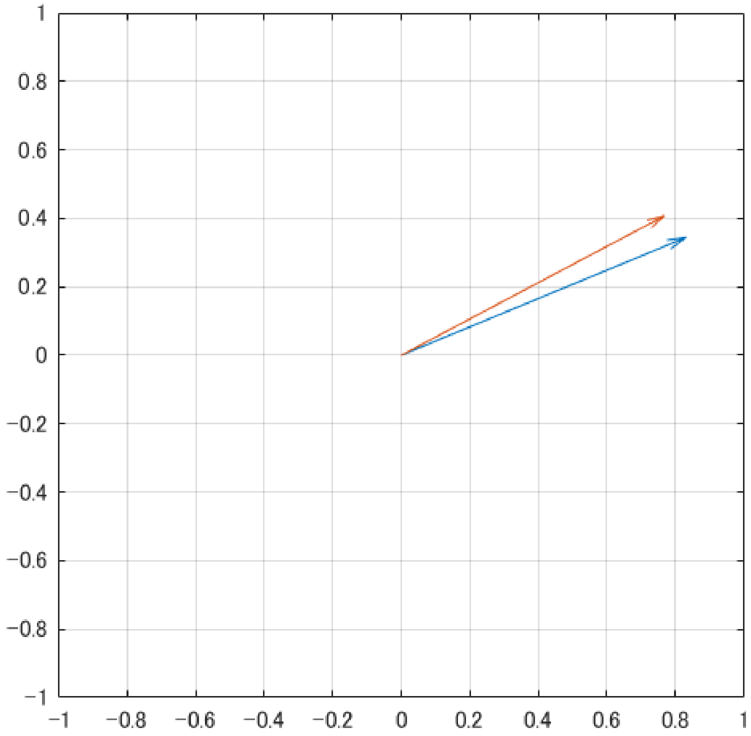
```
t = 0.125 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.9239
    0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.8539
    0.4527
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```

x軸からの角度 $\theta = \pi/4$

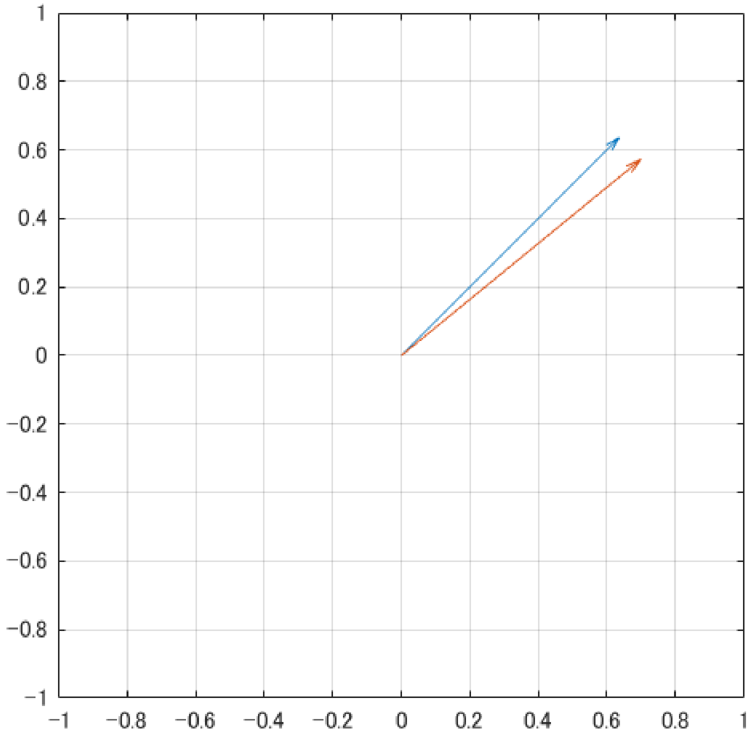
```
t = 0.25 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.7071
    0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.7778
    0.6364
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/8$

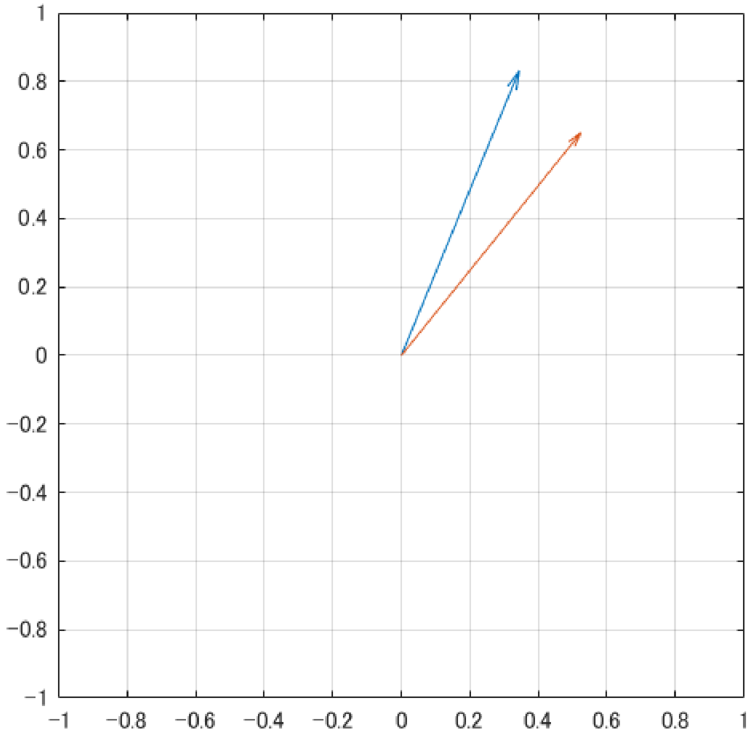
```
t = 0.375 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.3827
    0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.5833
    0.7233
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi/2$

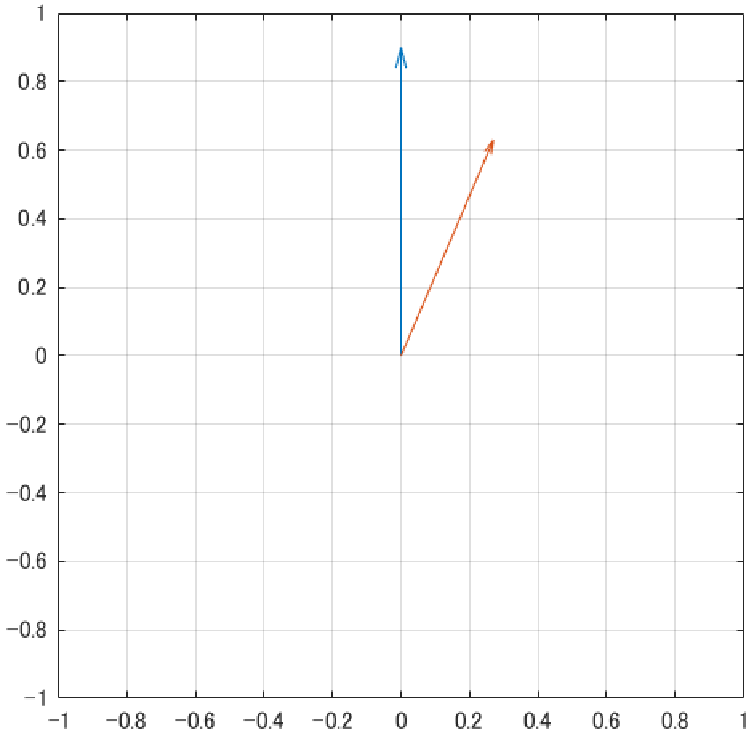
```
t = 0.5 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.0000
    1.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.3000
    0.7000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 5\pi/8$

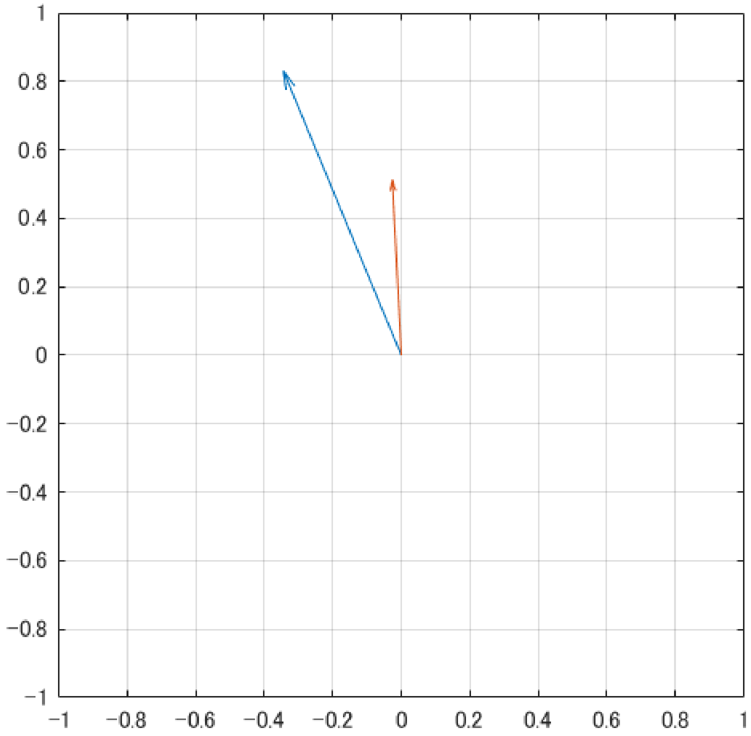
```
t = 0.625 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.3827
    0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.0290
    0.5702
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/4$

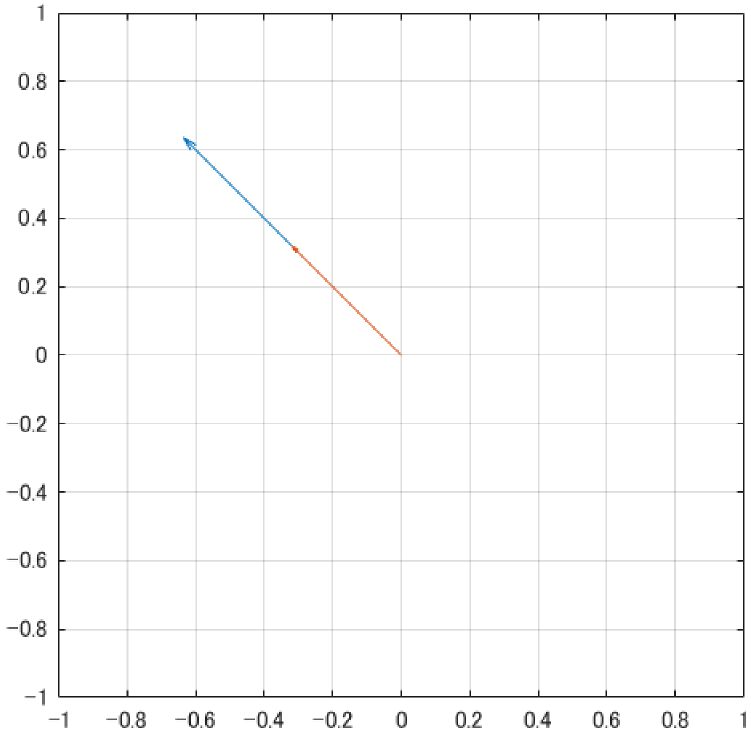
```
t = 0.75 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.7071
    0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.3536
    0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 7\pi/8$

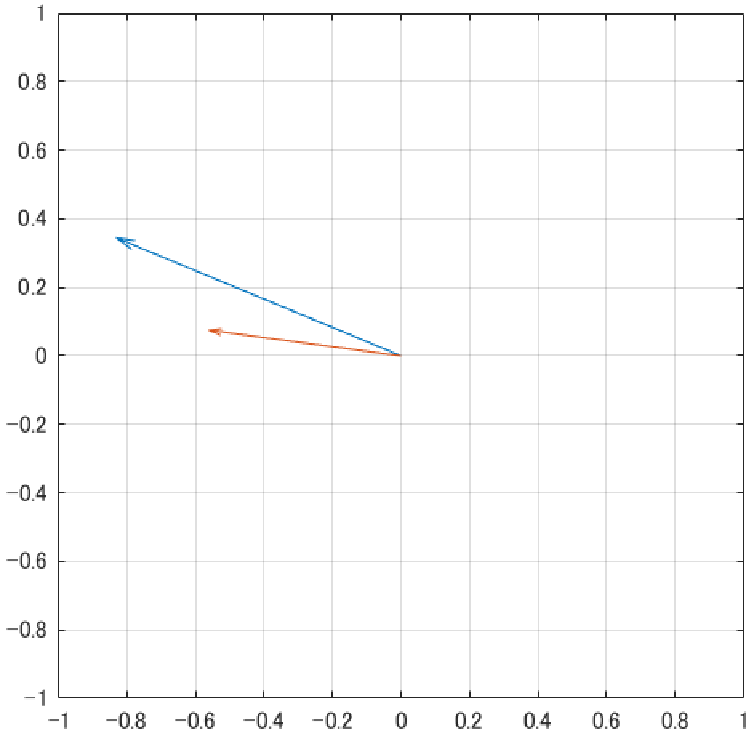
```
t = 0.875 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.9239
    0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.6243
    0.0831
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi$

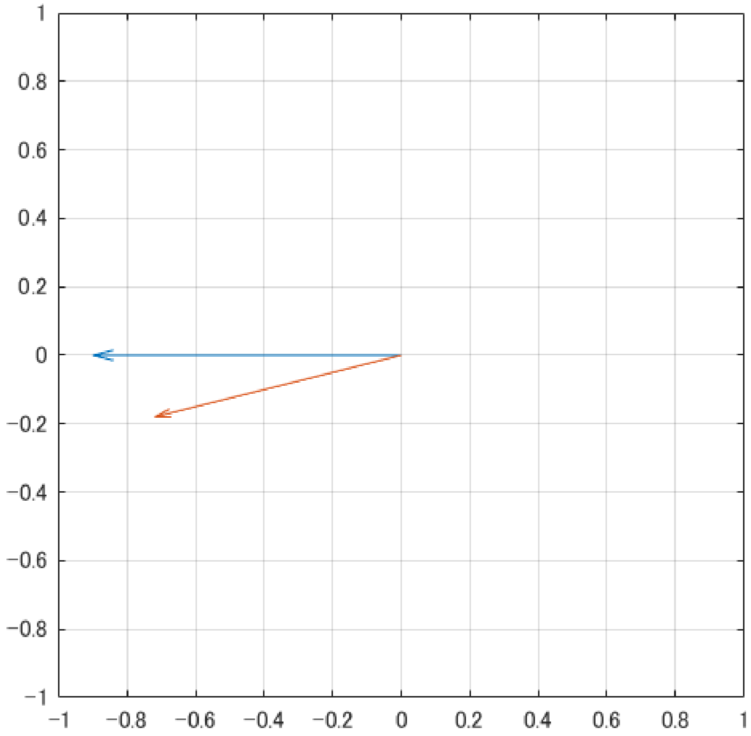
```
t = 1 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -1.0000
    0.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.8000
   -0.2000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 9\pi/8$

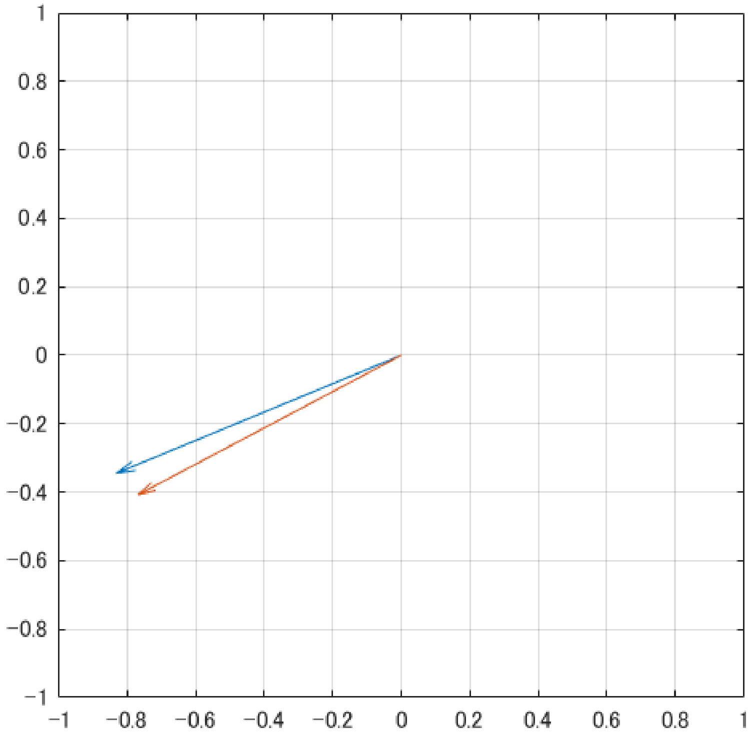
```
t = 1.125 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.9239
   -0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.8539
   -0.4527
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 5\pi/4$

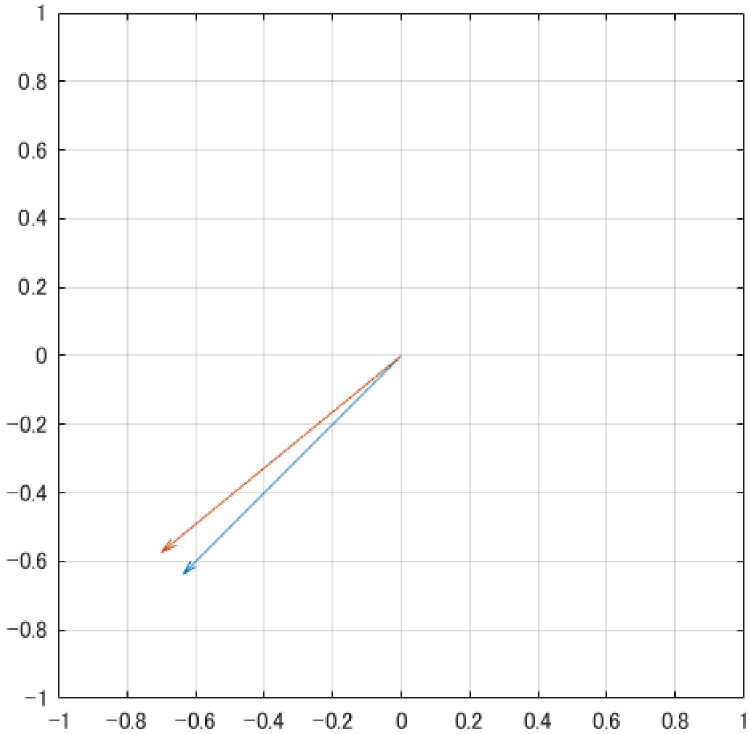
```
t = 1.25 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.7071
   -0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.7778
   -0.6364
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 11\pi/8$

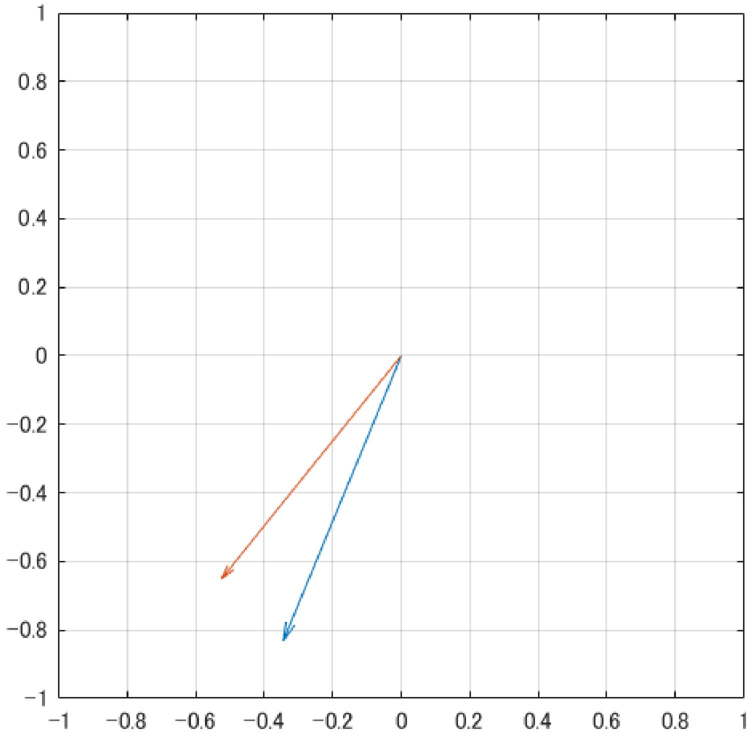
```
t = 1.375 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.3827
   -0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.5833
   -0.7233
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/2$

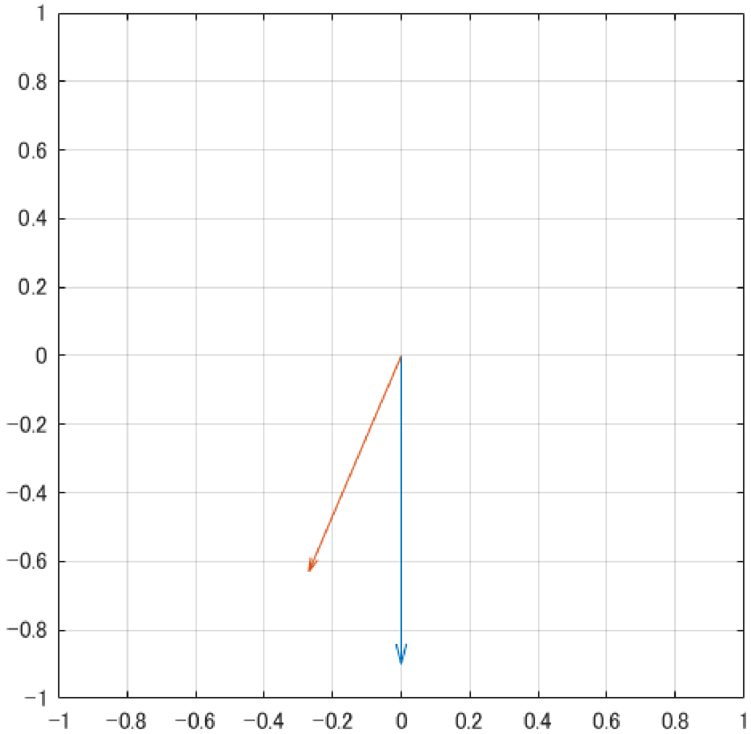
```
t = 1.5 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
   -0.0000
   -1.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
   -0.3000
   -0.7000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 13\pi/8$

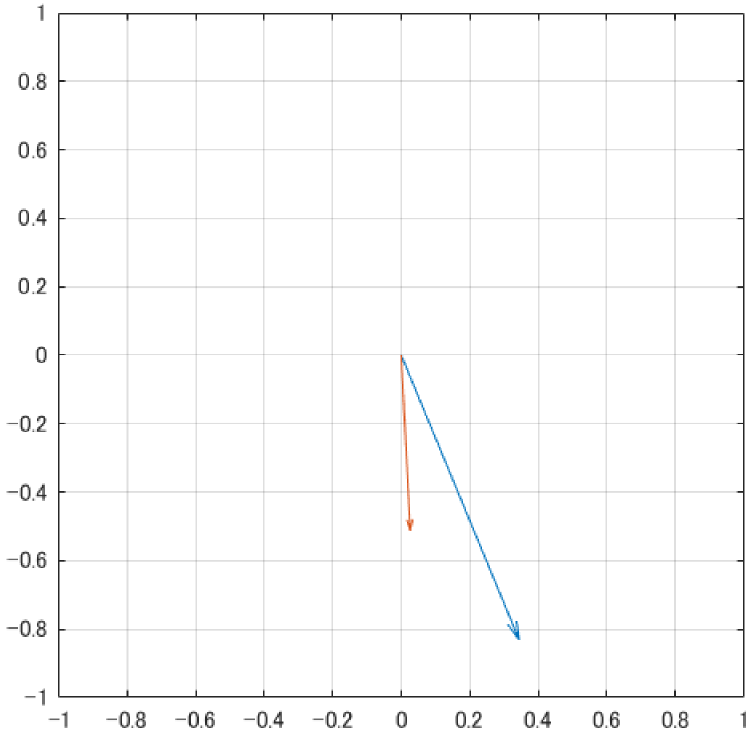
```
t = 1.625 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.3827
   -0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.0290
   -0.5702
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 7\pi/4$

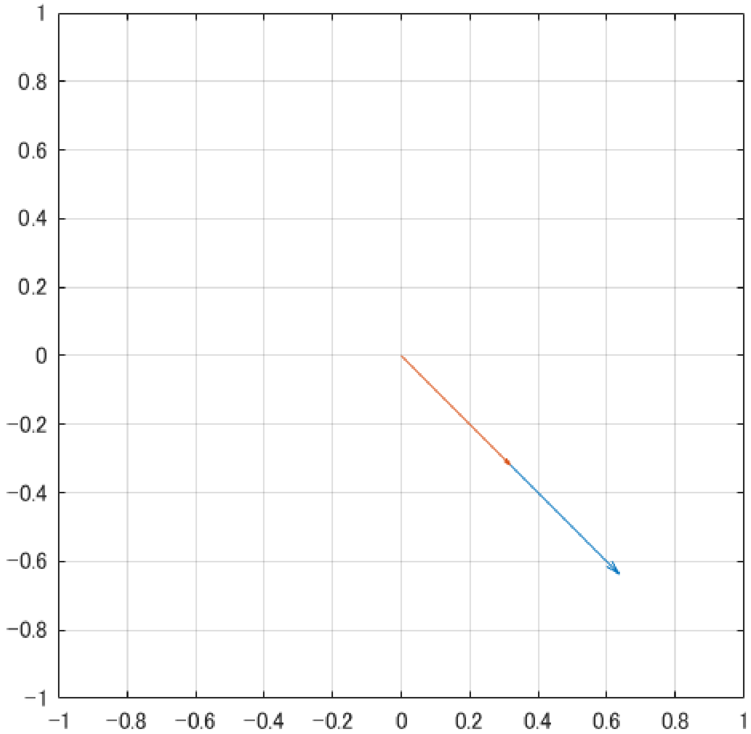
```
t = 1.75 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.7071
   -0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.3536
   -0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 15\pi/8$

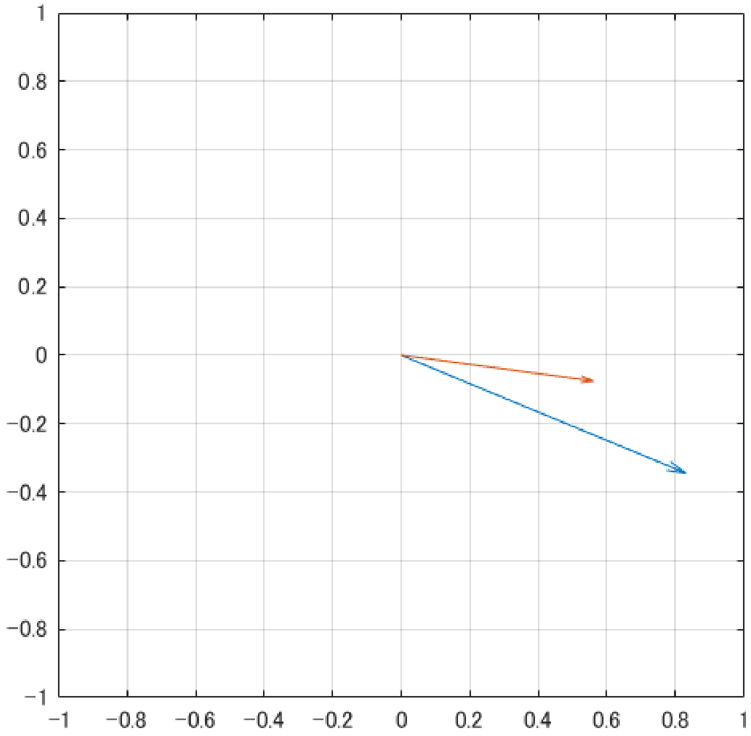
```
t = 1.875 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.9239
   -0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.6243
   -0.0831
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 2\pi$

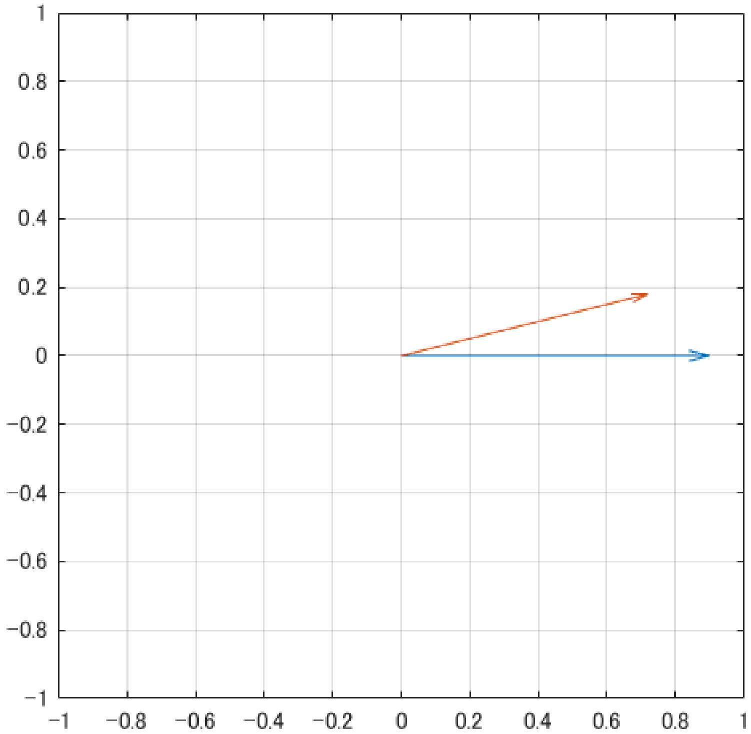
```
t = 2 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    1.0000
   -0.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.8000
    0.2000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



例題

例題1

射影行列 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるか予測し, MATLABで確かめよ

例題2

鏡映行列 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるか予測し, MATLABで確かめよ

例題3

90度の回転行列 $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ には実数の固有値がない. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるかMATLABで確かめよ

例題4

全ての固有値の積は行列式と等しいことを示せ