

クレジット:

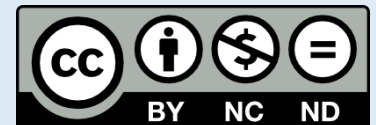
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



第12講 行列の対角化

12-3 行列の対角化

行列 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$ を考える

```
A = [ 0.8 0.3; 0.2 0.7 ]
```

```
A = 2x2
    0.8000    0.3000
    0.2000    0.7000
```

```
syms x
det(A - x * eye(2))
```

```
ans =
    1/2 - 3*x/2 + x^2
```

$|A - \lambda E| = 0$ を解いて、固有値 $\lambda = 1, \frac{1}{2}$ を得る. また, $(A - E)x = 0$, $(A - \frac{1}{2}E)x = 0$ を解くことで、固有ベクトル $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ を得る

MATLAB では eig() により、固有値と固有ベクトルを計算できる

```
[P, D] = eig(A)
```

```
P = 2x2
    0.8321   -0.7071
    0.5547    0.7071
D = 2x2
    1.0000     0
     0     0.5000
```

P は(列)固有ベクトルを横にならべたもの, D は固有値を対角成分にならべた対角行列である

MATLAB の返す固有ベクトルは、長さ1に規格化されていることに注意. また、 v が固有ベクトルならば $-v$ も同じ固有値に属する固有ベクトルである

12-4 固有ベクトル

固有ベクトルに A を掛けると、方向は同じで長さが変わる. (固有値が負の場合には向きが反転する)

```
v = P(:,1)
```

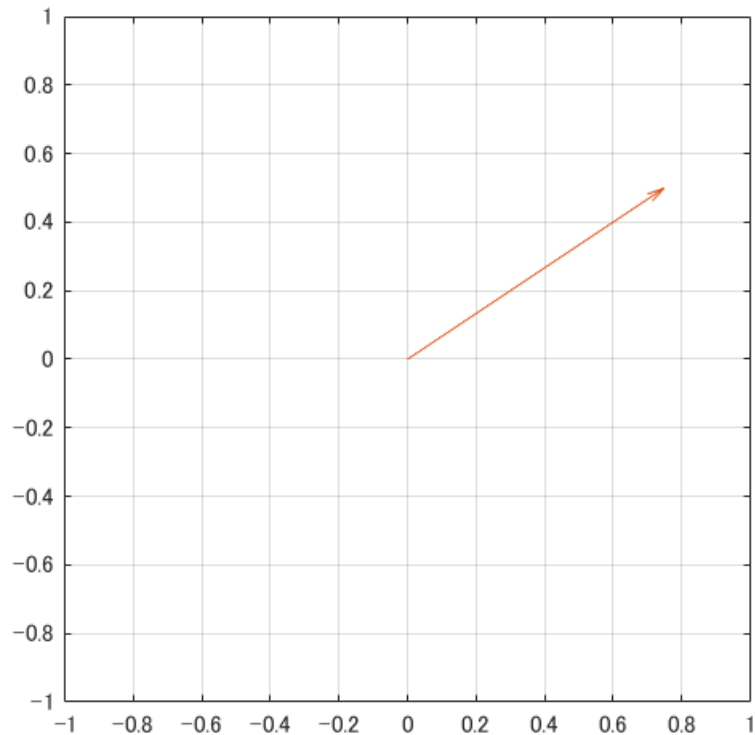
```
v = 2x1
    0.8321
    0.5547
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
```

0.8321
0.5547

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));  
hold on  
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));  
hold off  
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



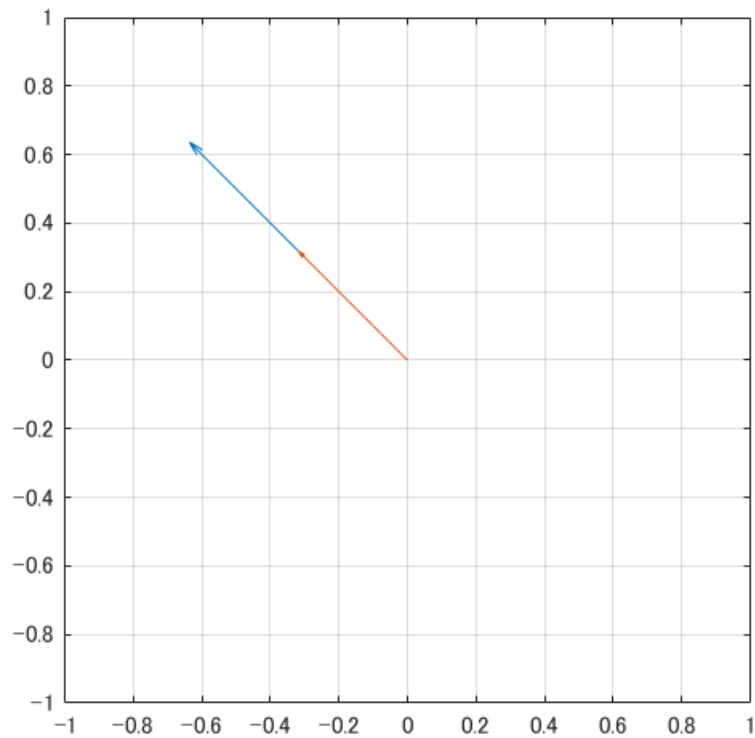
```
v = P(:,2)
```

```
v = 2x1  
-0.7071  
0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1  
-0.3536  
0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));  
hold on  
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));  
hold off  
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



いろいろな方向のベクトルを A で変換してみる

固有ベクトルの場合だけ, 変換後のベクトルは平行になる

x軸からの角度 $\theta = 0$

$$v = [1; 0]$$

$$v = 2 \times 1$$

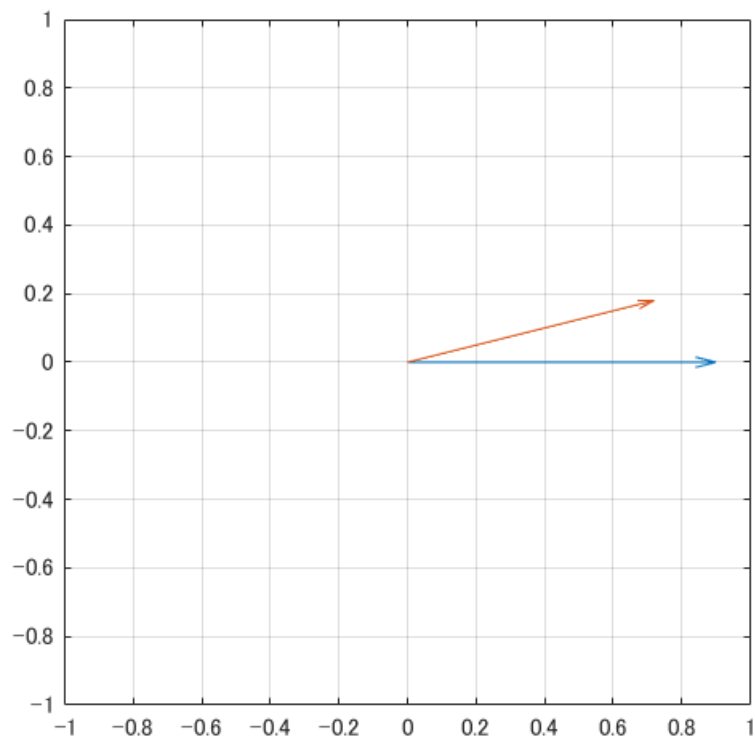
$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Av = A * v$$

$$Av = 2 \times 1$$

$$\begin{matrix} 0.8000 \\ 0.2000 \end{matrix}$$

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi/8$

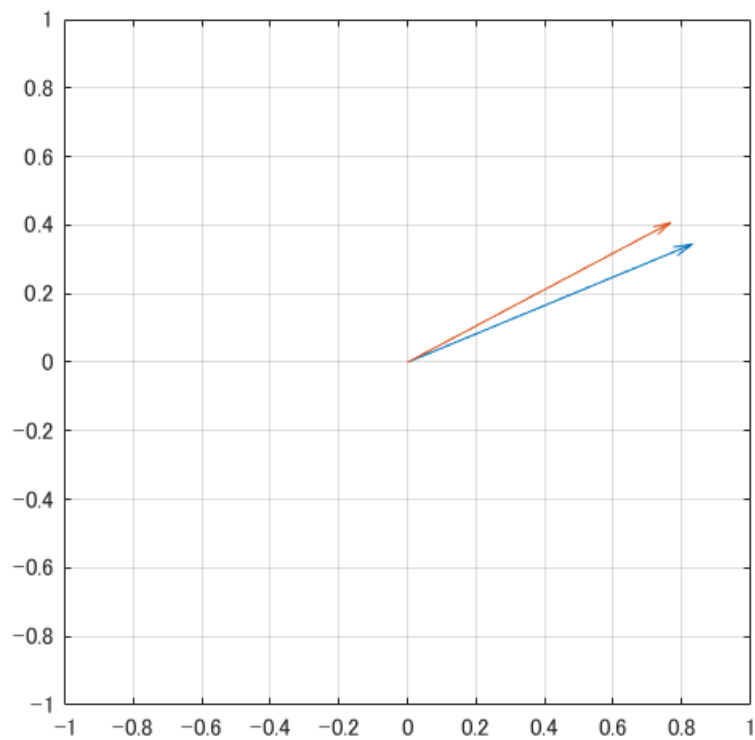
```
t = 0.125 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    0.9239
    0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    0.8539
    0.4527
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi/4$

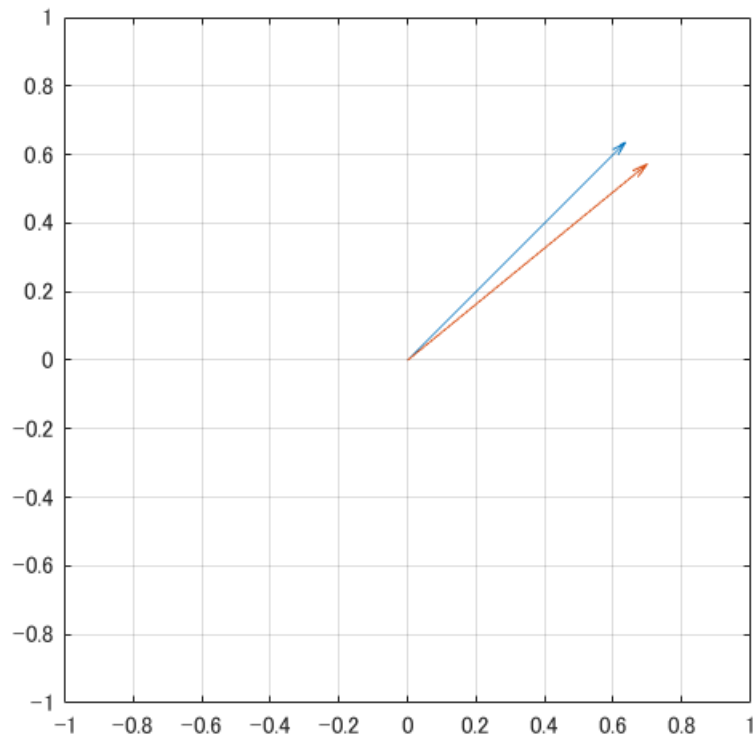
```
t = 0.25 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    0.7071
    0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    0.7778
    0.6364
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/8$

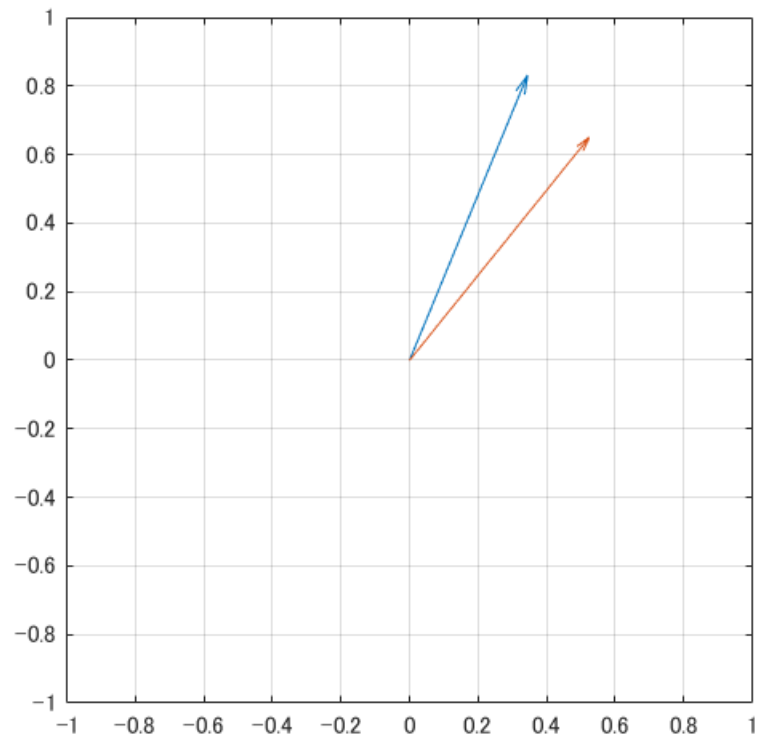
```
t = 0.375 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    0.3827
    0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    0.5833
    0.7233
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi/2$

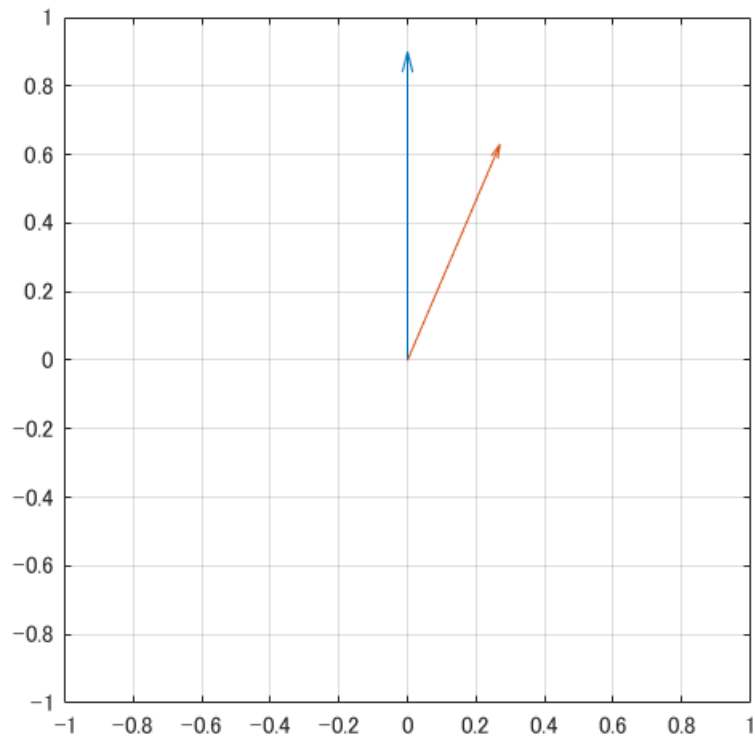
```
t = 0.5 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    0.0000
    1.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    0.3000
    0.7000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```

x軸からの角度 $\theta = 5\pi/8$

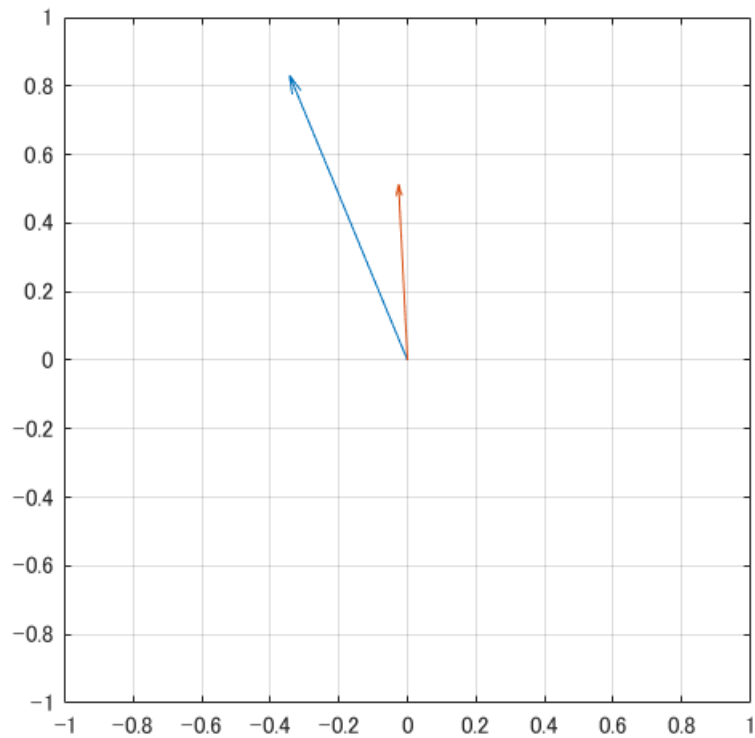
```
t = 0.625 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.3827
     0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.0290
     0.5702
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/4$

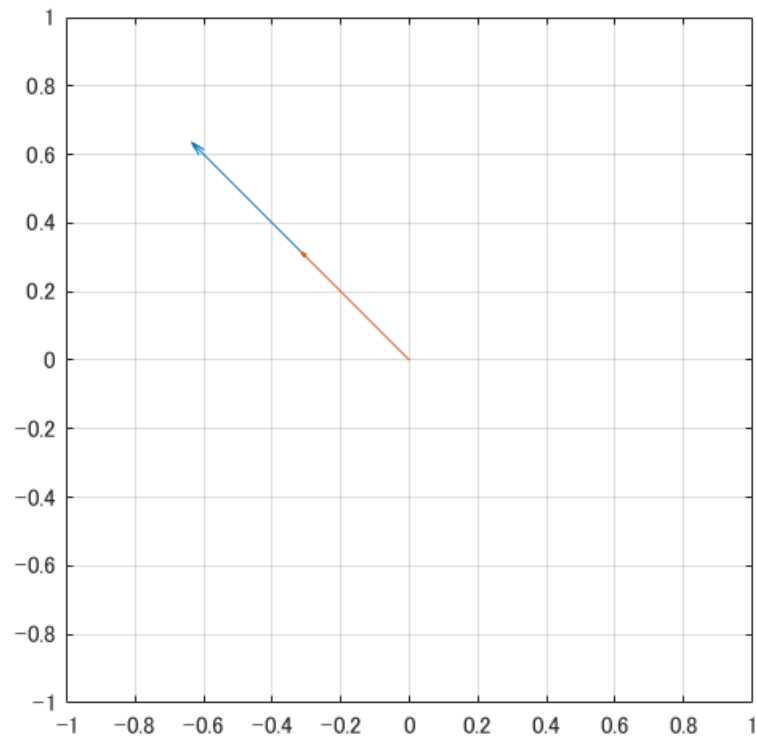
```
t = 0.75 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.7071
     0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.3536
     0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 7\pi/8$

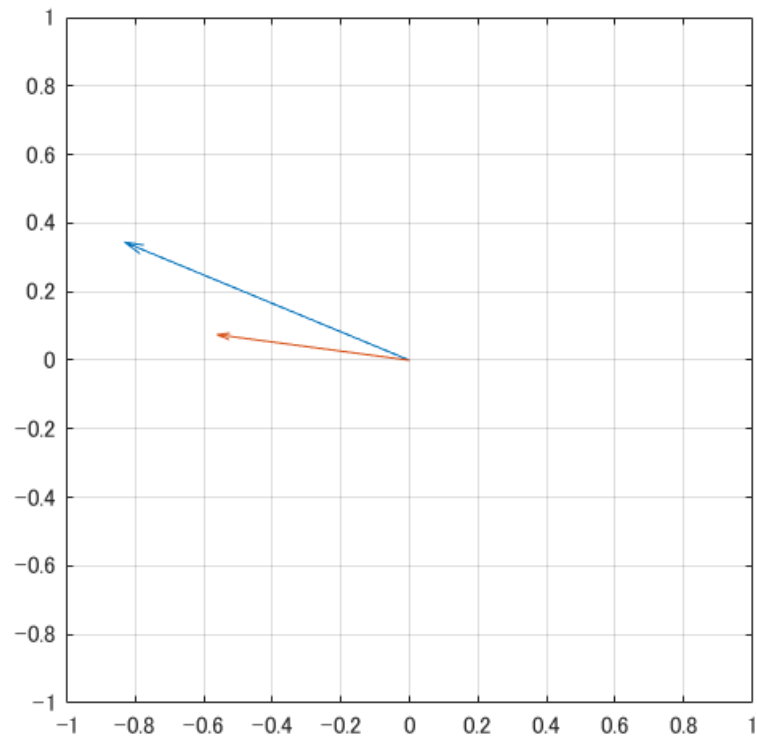
```
t = 0.875 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.9239
     0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.6243
     0.0831
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = \pi$

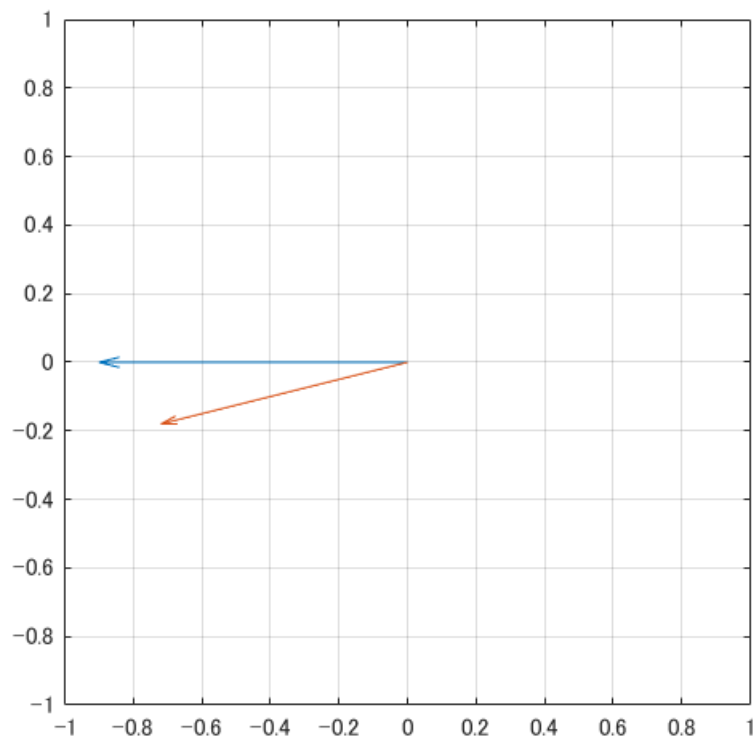
```
t = 1 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -1.0000
     0.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.8000
    -0.2000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 9\pi/8$

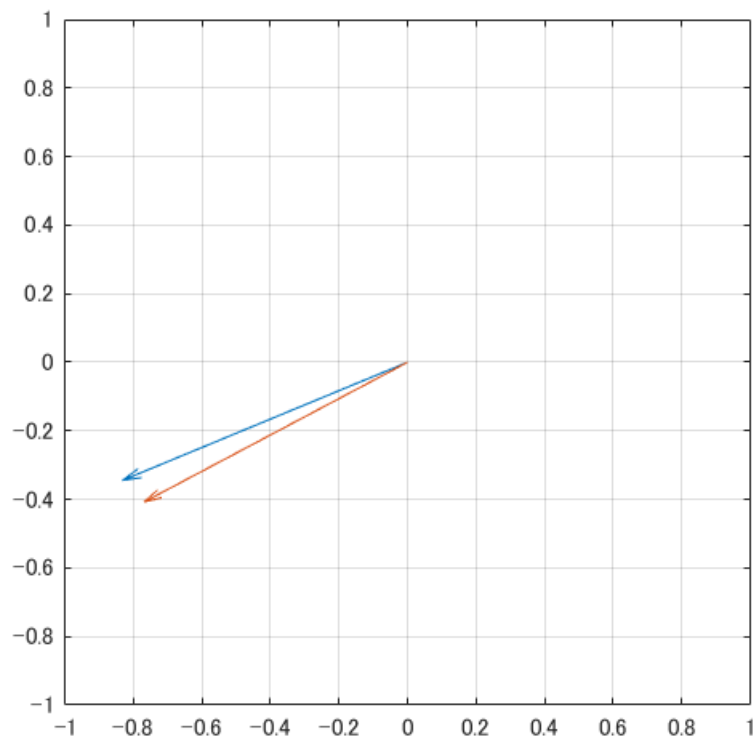
```
t = 1.125 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    -0.9239
    -0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    -0.8539
    -0.4527
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 5\pi/4$

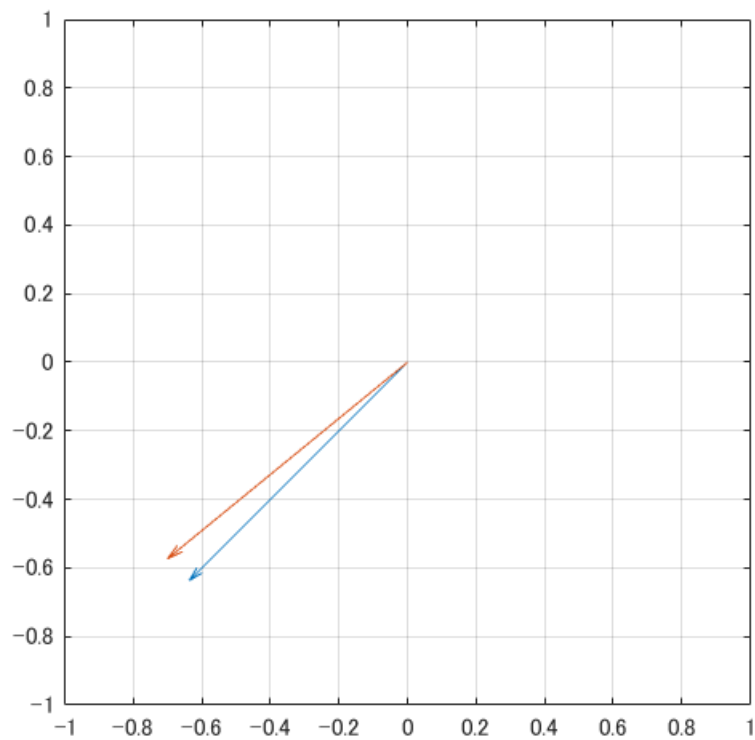
```
t = 1.25 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.7071
    -0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.7778
    -0.6364
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 11\pi/8$

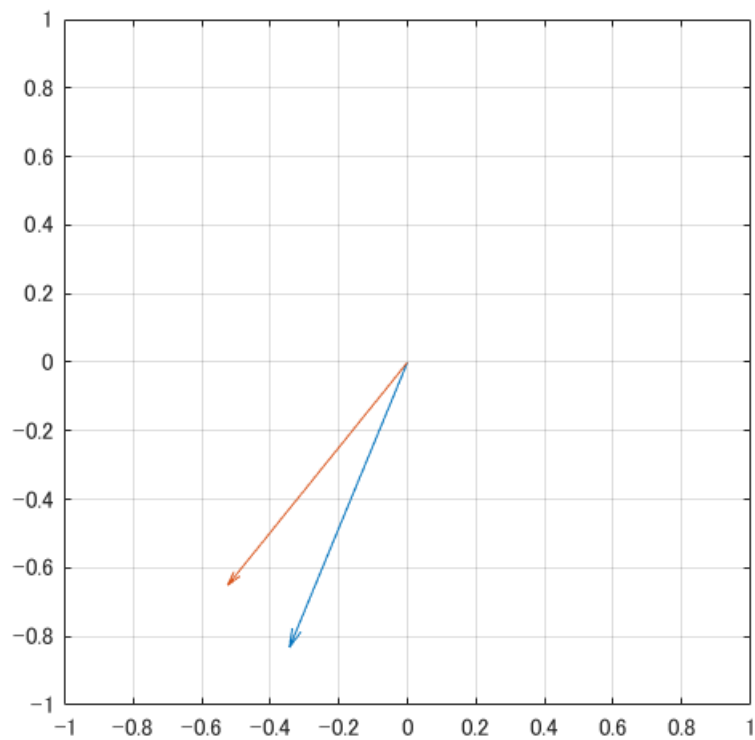
```
t = 1.375 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.3827
    -0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.5833
    -0.7233
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 3\pi/2$

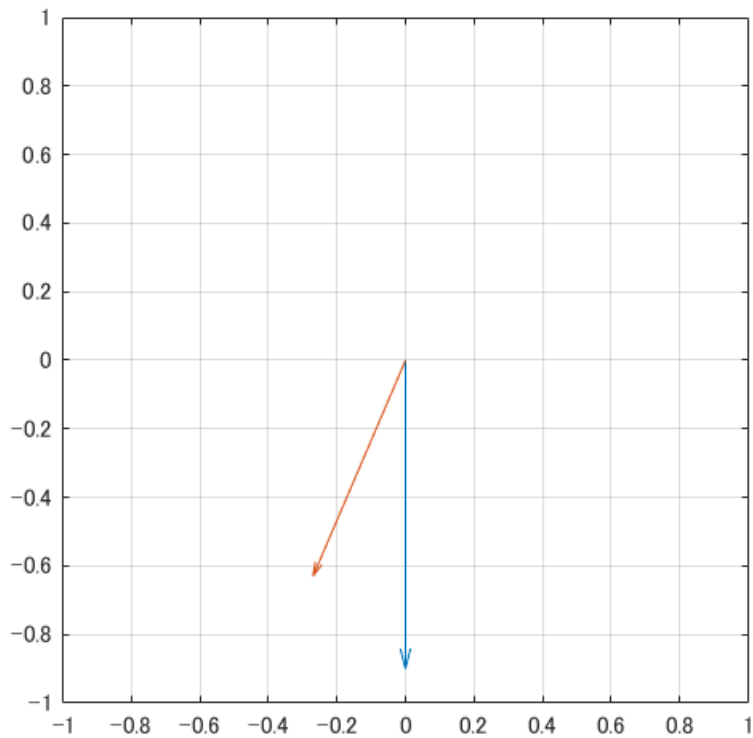
```
t = 1.5 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    -0.0000
    -1.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    -0.3000
    -0.7000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```

x軸からの角度 $\theta = 13\pi/8$

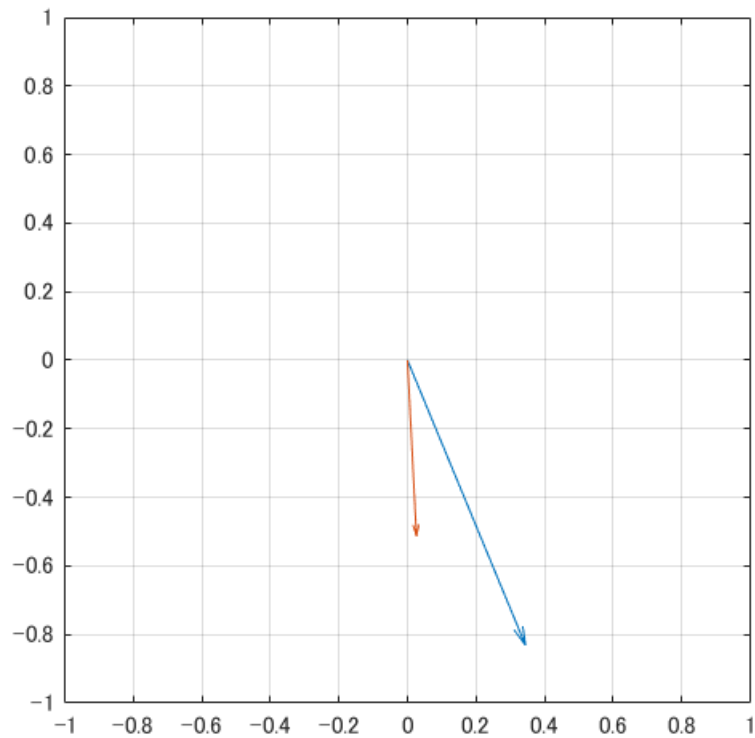
```
t = 1.625 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.3827
   -0.9239
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.0290
   -0.5702
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 7\pi/4$

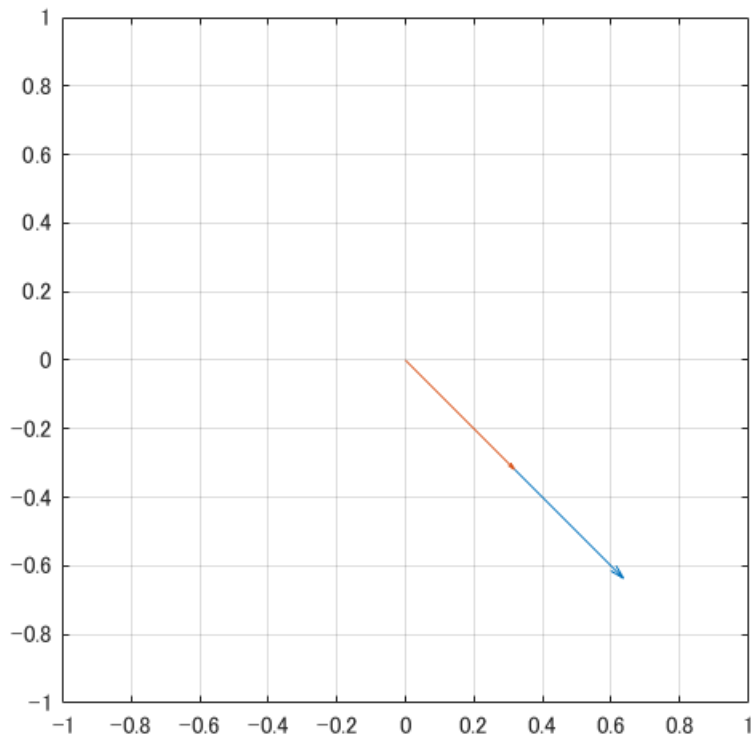
```
t = 1.75 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.7071
   -0.7071
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.3536
   -0.3536
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 15\pi/8$

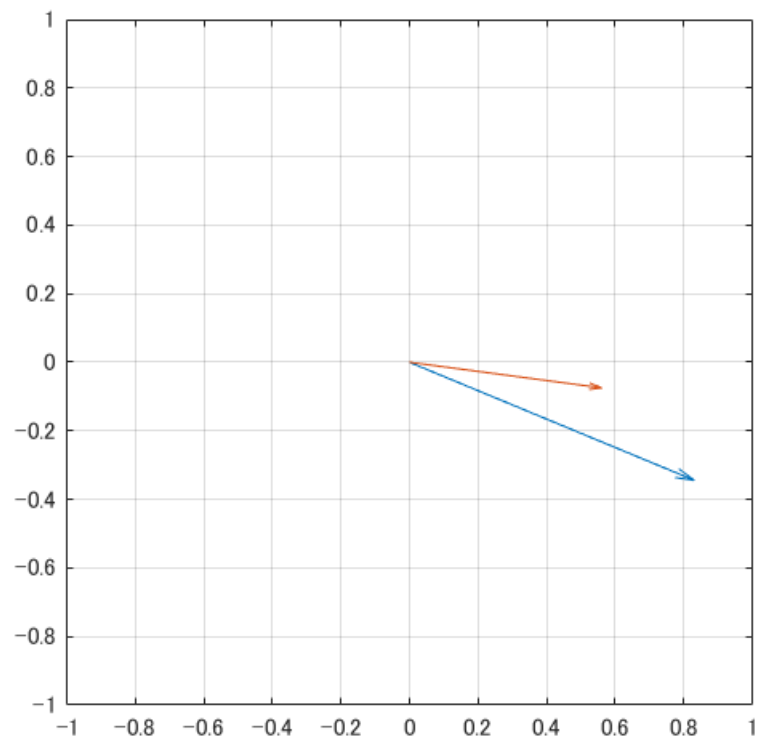
```
t = 1.875 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2×1
    0.9239
   -0.3827
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2×1
    0.6243
   -0.0831
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



x軸からの角度 $\theta = 2\pi$

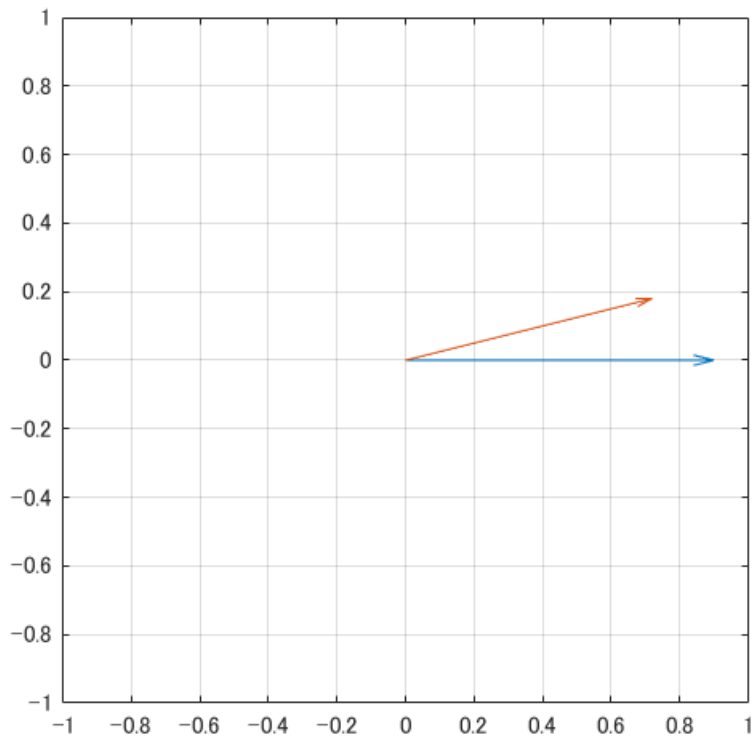
```
t = 2 * pi;
v = [cos(t); sin(t)]
```

```
v = 2x1
    1.0000
   -0.0000
```

```
Av = A * v
```

```
Av = 2x1
    0.8000
    0.2000
```

```
quiver(0, 0, v(1), v(2));
hold on
quiver(0, 0, Av(1), Av(2));
hold off
xlim([-1 1]); ylim([-1 1]); daspect([1 1 1]); grid on
```



例題

例題1

射影行列 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるか予測し, MATLABで確かめよ

例題2

鏡映行列 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるか予測し, MATLABで確かめよ

例題3

90度の回転行列 $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ には実数の固有値がない. いろいろな方向のベクトルに P を掛けたとき, どのように変換されるかMATLABで確かめよ

例題4

全ての固有値の積は行列式と等しいことを示せ