クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

正方行列（n×n 行列）の固有値について

A-1　n×n 正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ を持つならば，Aは対角化可能である．

$A\mathbf{x}_k = \lambda\mathbf{x}_k$, k=1,2,...n.

行列を　P　を　$P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$ と定義すると

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．またPは固有ベクトルを並べたものだから，逆行列P^{-1}が存在する．(一次独立性による)：

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots k_n\mathbf{x}_n = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(P) = 0$$

従って

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_k)$$

A-2　実対称行列の固有値は実数である．

$A\mathbf{x}_k = \lambda\mathbf{x}_k$ である．この式の複素共役をとって$\overline{A}\ \overline{\mathbf{x}}_k = \overline{\lambda}_k\overline{\mathbf{x}}_k$.

またエルミート共役（複素共役転置）をとって，${}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)A^* = \overline{\lambda}_k\ {}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)$.

ただしAは実対称だから$\overline{A} = A$, ${}^tA = A$. これらを用いれば ${}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)A\mathbf{x}_k = \overline{\lambda}_k\ {}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k$.

左辺は ${}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)A\mathbf{x}_k ={}^t (\overline{\mathbf{x}}_k)\lambda_k\mathbf{x}_k = \lambda_k{}^t(\overline{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k$ と変形されるから $\overline{\lambda}_k = \lambda_k$.

A-3　実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する．

A が対称行列であるから，${}^t\mathbf{x}_iA\mathbf{x}_j =\ {}^t(A\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_j = \lambda_i\ {}^t\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$.

また左辺は${}^t\mathbf{x}_iA\mathbf{x}_j = \lambda_j\ {}^t\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$．ここで$\lambda_i \neq \lambda_j$ であるから　${}^t\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = 0$ となる．