

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I  
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



## 正方行列 (n×n 行列) の固有値について

**A-1 n×n 正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトル  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  を持つならば, Aは対角化可能である.**

$$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k, k=1,2,\dots,n.$$

行列を P を  $P = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  と定義すると

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である. またPは固有ベクトルを並べたものだから, 逆行列  $P^{-1}$  が存在する. (一次独立性による):

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(P) = 0$$

従って

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_k)$$

**A-2 実対称行列の固有値は実数である.**

$A\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$  である. この式の複素共役をとって  $\bar{A} \bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\lambda}_k \bar{\mathbf{x}}_k$ .

またエルミート共役 (複素共役転置) をとって,  ${}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)A^* = \bar{\lambda}_k {}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)$ .

ただしAは実対称だから  $\bar{A} = A$ ,  ${}^tA = A$ . これらを用いれば  ${}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)A\mathbf{x}_k = \bar{\lambda}_k {}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k$ .

左辺は  ${}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)A\mathbf{x}_k = {}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)\lambda_k\mathbf{x}_k = \lambda_k {}^t(\bar{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k$  と変形されるから  $\bar{\lambda}_k = \lambda_k$ .

**A-3 実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.**

A が対称行列であるから,  ${}^t\mathbf{x}_i A \mathbf{x}_j = {}^t(A\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_j = \lambda_i {}^t\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ .

また左辺は  ${}^t\mathbf{x}_i A \mathbf{x}_j = \lambda_j {}^t\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j$ . ここで  $\lambda_i \neq \lambda_j$  であるから  ${}^t\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j = 0$  となる.