クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

固有値，固有ベクトルと線形独立，線形従属

1．対称行列

行列Aを転置したもの（転置行列）を${}^tA$と書き，（ただし，MATLABではA'と書くので注意．），

各成分の複素共役からなる行列を $\bar{A}$ （$(\bar{A})_{ij} = \bar{A}_{ij}$ ）と書く．

$A^* = {}^t\bar{A}$を随伴行列あるいはエルミート共役という．

$$A^*A = AA^*$$

を満たす行列を**正規行列（normal matrix)**という．

実対称行列 （$(A)_{ij} = (A)_{ji}$） ，エルミート行列 （ $A^* = A$ ） ，ユニタリー行列 （ $A^* = A^{-1}$ ） は正規行列である．

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

が実対称行列 (a_{ij}が実数かつ$a_{ij} = a_{ji}$)であるとする．

このとき**異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交**する．

例1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

```
A=[5 -1;-1 5]
```

```
A = 2×2
     5    -1
    -1     5
```

```
eig(A)
```

```
ans = 2×1
     4
     6
```

から固有値は4，6を得る．

対応する固有ベクトルは

```
[P, D]=eig(A)
```

```
P = 2×2
   -0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071

D = 2×2
```

```
    4     0
    0     6
```

から

$$\lambda_1 = 4: \quad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6: \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

を得る．

ここで注意すべきことは2つの固有ベクトルが直交していることである:

$${}^t\mathbf{x_1}\mathbf{x}_2 = 0$$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$$

このことは一般に成り立つ．

また

$$P = (\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2), \quad AP = P\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$$

である（下で確認）；

% 固有ベクトルの自然な選択に合わせて，符号を逆転しておく．

```
P=-V
```

```
P = 2×2
    0.7071    0.7071
    0.7071   -0.7071
```

```
A*P
```

```
ans = 2×2
    2.8284    4.2426
    2.8284   -4.2426
```

```
P*D
```

```
ans = 2×2
    2.8284    4.2426
    2.8284   -4.2426
```

以上から $A = P\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}P^{-1}$ と書ける．

```
P*D*inv(P)
```

```
ans = 2×2
     5    -1
    -1     5
```

2．非対称行列

非対称行列であっても，正規行列でないわけではない．

例　$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad BB^*=B^*B$

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&0&0\\4&2&1\end{pmatrix}$$

は正規行列ではない．

```
A=[3 2 1;2 0 0; 4 2 1]
```

```
A = 3×3
     3     2     1
     2     0     0
     4     2     1
```

この行列の特性多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-5)$$

であるから，固有値は$\lambda_1=5,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=0$ を得る．これから対応する固有ベクトルとして，

$$\lambda_1=5,\ \mathbf{x}_1=\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix}-5\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-1,\ \mathbf{x}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=0,\ \mathbf{x}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

を得る．

```
[P,D]=eig(A)
```

```
P = 3×3
   -0.6202   -0.4472   -0.0000
   -0.2481    0.8944   -0.4472
   -0.7442    0.0000    0.8944
D = 3×3
    5.0000         0         0
         0   -1.0000         0
         0         0   -0.0000
```

この固有ベクトルは直交していない．

固有ベクトルを並べて

$$P=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)=\begin{pmatrix}-5/\sqrt{65}&-1/\sqrt{5}&0\\-2/\sqrt{65}&2/\sqrt{5}&-1/\sqrt{5}\\-6/\sqrt{65}&0&2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

を得る．当然

$$AP = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

```
A*P
```

```
ans = 3×3
   -3.1009    0.4472    0.0000
   -1.2403   -0.8944   -0.0000
   -3.7210    0.0000         0
```

```
P*D
```

```
ans = 3×3
   -3.1009    0.4472    0.0000
   -1.2403   -0.8944    0.0000
   -3.7210   -0.0000   -0.0000
```

```
pinv=inv(P)
```

```
pinv = 3×3
   -1.0750   -0.5375   -0.2687
   -0.7454    0.7454    0.3727
   -0.8944   -0.4472    0.8944
```

書き直せば

$$A = PDP^{-1}$$

である.

```
PDiP=P*D*inv(P)
```

```
PDiP = 3×3
    3.0000    2.0000    1.0000
    2.0000   -0.0000   -0.0000
    4.0000    2.0000    1.0000
```

この行列Pは**正則行列**（逆行列が定義できる行列, regular matrix)であり,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{65}/15 & -\sqrt{65}/15 & -\sqrt{65}/30 \\ -\sqrt{5}/3 & \sqrt{5}/3 & \sqrt{5}/6 \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

```
PM1=[-2*sqrt(65)/15 -sqrt(65)/15 -sqrt(65)/30;...
    -sqrt(5)/3 sqrt(5)/3 sqrt(5)/6 ;-2/sqrt(5) -1/sqrt(5) 2/sqrt(5)]
```

である．これから直接

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる.

$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

3. 線形結合，線形従属，線形独立

ベクトル$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$に関して，

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

を線形結合（1次結合）という.

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = 0$$

が自明でない（すべての j に対して$c_j \neq 0$ではない）係数について成り立つならば，そのときベクトル$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$は線形従属であるという.

線形従属でない（（すべての j に対して$c_j = 0$である時のみ成り立つ）場合に，ベクトル$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$は線形独立であるという.

4. 正方行列の固有値の性質

（証明については Appendix.mlx を見よ．）

4-1. n×n 正方行列 A が n 個の線形独立な固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ を持つならば，Aは対角化可能である.

4-2. 実対称行列の固有値は実数である.

4-3. 実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.