クレジット：

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

行列式　(Determinant)

2×2行列の行列式　（定義）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

と定義される．この定義を用いると

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

と書き直される.

3×3行列の行列式　（定義）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

と定義される.

この定義をまとめると

（1）6つの項は行および列のサフィックスは1，2，3が一通り現れている.

（2）行のサフィックスを1，2，3の順番にそろえて書いたものが上の式であるが，

列のサフィックスは，123, 231, 312, 132, 213, 321となっている.

それぞれ**123の順番を，偶数回または奇数回の交換（置換という）で並べ替えたもの**である.

置換の数は最初の3つが偶数回(偶置換），後ろの3つが奇数回（奇置換）になっている.

係数は，偶置換には+1，奇置換には-1があてられる.

```
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

```
det(A)
```

ans = $a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$

n×n行列の行列式　（定義）

ここで現れた並べ替え（置換）の操作を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \equiv (\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n))$$

と書く． $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ は，1，2，3...n を並べ替えたものである．

一般の $n \times n$ 行列 Aの行列式を次のように定義する．

P_σ は置換σの偶奇性で2または1をとる．

$$\det A = \sum_\sigma (-1)^{P_\sigma}\ a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

行列式の意味するもの

行列Aの意味は，既に説明があったように，線形写像，線型（1次）変換である．

行列式とは何だろう．

2×2行列の場合

一般の行列Aをベクトル

$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ ，　$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$　を用いて

$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$

と書こう. そうすると

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

一方，簡単のために$a_{ij} > 0$として，2つのベクトル$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ ，　$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$　をとり，

それと一緒に原点$O = (0,0)$および点$A = (a_{11},\ 0)$，　$B = (0,\ a_{22})$，　$C = (a_{11},\ a_{22})$ の

4点を頂点とした長方形を考えよう．

さらに点$P = (a_{11},\ a_{21})$，$Q = (a_{12},\ a_{22})$ をとる．

四角形OACBの面積をS_{OACB}，例えば三角形OPQの面積を$S_{\Delta OPQ}$ と書くと，

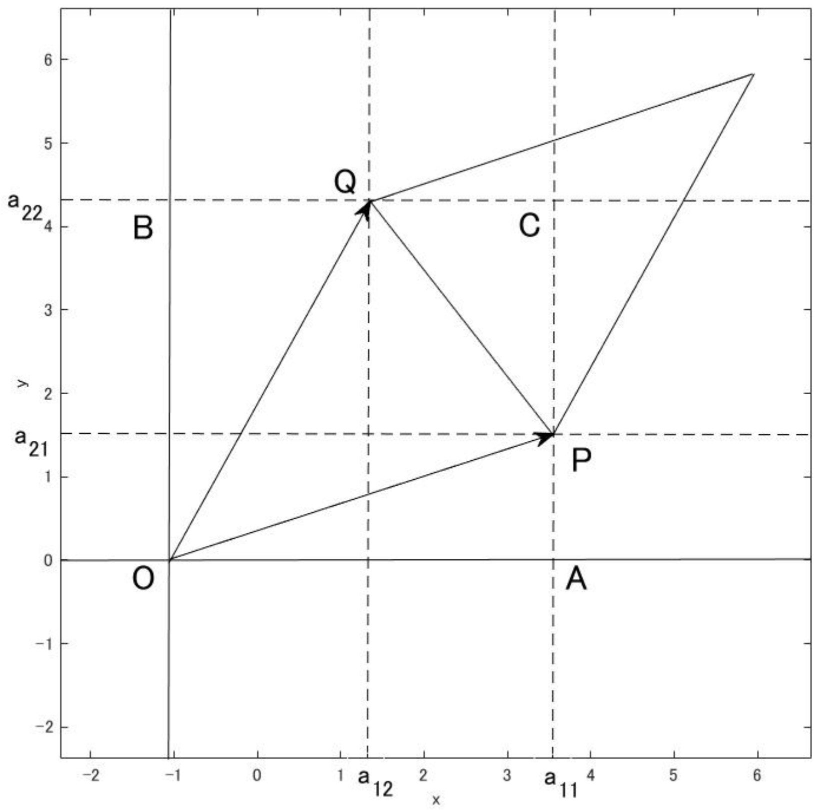
$S_{OACB} = a_{11}a_{22}$，$S_{\Delta OAP} = a_{11}a_{21}/2$，$S_{\Delta OQB} = a_{12}a_{22}/2$，$S_{\Delta PCQ} = (a_{11} - a_{12})(a_{22} - a_{21})/2$ である．

従って

$S_{\Delta OPQ} = S_{OACB} - S_{\Delta OAP} - S_{\Delta OQB} - S_{\Delta PCQ} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})/2$

となる.

```
Det2=imread('DetDef.jpg');
imshow(Det2)
```



すなわち

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **は**

2ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ **の作る平行四辺形の面積である （符号は除く）.**

3×3行列の場合

以上のことは3×3行列の行列式についても言えて,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$ **を用いて**

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

と書くと

$\det A$ **は3ベクトルの作る平行6面体の体積Vである（符号は除く）：**

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})a_{13} + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})a_{23} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$V = |(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3| = |\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|$$

一般のn×n行列の場合

以上のステートメントは一般のn×n行列の行列式についても成り立ち，n次元空間の超平行多面体の体積である.

行列式の性質

以下の性質は行列式の定義 $\det A = \sum_\sigma (-1)^{P_\sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ **から すぐに示すことができる.**

性質１．２つの行（または列）を交換すると，行列式の値は符号を変える．（交代性）

性質2．n×n単位行列の行列式は1.

性質3．行列の行（または列）の要素を総て t 倍すると，行列式の値は t 倍になる．（多重線型性１）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ta_{21} & ta_{22} & ta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性質4．行列 の行（または列）の要素について：（多重線型性２）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

この性質は行列式の一般的な定義式を用いて以下のようにすればよい.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \sum_\sigma (-1)^{p_\sigma} a_{1\sigma(1)}(a_{2\sigma(2)}+b_{2\sigma(2)})a_{3\sigma(3)} = \sum_\sigma (-1)^{p_\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} + \sum_\sigma (-1)^{p_\sigma} a_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性質5.　性質１より，行列式の2つの行（または列）が等しければその行列式は0である.

性質6. ある行（または列）の倍数を別の行（または列）から引いても、その行列式の値は変わらない.

性質7. 三角行列の行列式は，その三角行列の対角成分の積に等しい.

性質8.　転置行列の行列式は元の行列の行列式に等しい.

性質9.　ABの行列式はそれぞれの行列式の積に等しい：

$$|AB| = |A||B|$$

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

と書くと

$$|AB| = \det\left(\sum\nolimits_{\sigma_1} \mathbf{a}_{\sigma_1} b_{\sigma_1 1}, \sum\nolimits_{\sigma_2} \mathbf{a}_{\sigma_2} b_{\sigma_2 2}, \cdots, \sum\nolimits_{\sigma_n} \mathbf{a}_{\sigma_n} b_{\sigma_n n}\right).$$

さらに性質3，4を用いて書き直すと

$$|AB| = \sum_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} b_{\sigma_1 1} b_{\sigma_2 2} \cdots b_{\sigma_n n} \det\left(\mathbf{a}_{\sigma_1}, \mathbf{a}_{\sigma_2}, \cdots, \mathbf{a}_{\sigma_n}\right)$$
$$= \sum_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} b_{\sigma_1 1} b_{\sigma_2 2} \cdots b_{\sigma_n n} (-1)^P \det\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right) = |A||B|$$

性質10.　逆行列：逆行列が存在するためには，行列式が0でないことが必要十分である.

行列Aのi行およびj列要素について，(ij) $要素のみ1とし，残りを0とした行列を

$$A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

と書くことにする．行列式の定義により

$$\mathrm{det}A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \left[\sum_{\sigma} (-1)^{P_\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)}\right]_{a_{ik}=a_{kj}=0, a_{ij}=1}$$

である．これから行列の重要な展開式

$$\mathrm{det}A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{det}A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

が得られる．

この式で(i, j)要素を$a_{ij} \to a_{kj}$と置き換えると右辺は行列Aのi行要素をk行要素に置き換えたものだから，0である．

まとめると

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \ \frac{1}{\mathrm{det}A} \mathrm{det}A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \delta_{ik}$$

となる．これは$B_{ji} = \dfrac{1}{\mathrm{det}A} \mathrm{det}A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$と定義すれば$AB = E$ということだから，$B = A^{-1}$を意味する．

この式は，逆行列の陽な表現であり大変重要なものである．（証明おわり）

課題

1）行列式の性質を証明せよ．

2）上で定義した行列$A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$と，行列$A$の$i$行および$j$列要素を除いた行列$M\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$について，$\mathrm{det}A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \mathrm{det}M\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$を示せ．

3）上または下三角行列について，その行列式は対角要素の積に等しいことを示せ．

4）幾つかの行列を自分で与え，それを掃き出し法により上または下三角行列に変換し，その上で行列式を計算せよ．

　これまで学んだいろいろなMATLABの手法で，それを検算し，MATLABのコマンドdet を用いて計算してみよ．

5）行列式の性質を使って，掃き出し法で行列式を計算する方法を考えてみよ．