第10講　線形写像と連立一次方程式

10-6 LU分解

行列をガウスの掃き出し法により下三角行列 L と上三角行列 U の積に分解する

$$Ax = LUx = p$$

$Ux = y$ とおくと $Ly = p$

L は下三角行列なので、上の行から順番に解ける(前進代入)

次に $Ux = y$ を解く

U は上三角行列なので、下の行から順番に解ける(後退代入)

LU分解の例: ピボット選択(行の入れ替え)を考えない場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

```
A = [1 4 7; 2 5 8; 3 6 10]
```

```
A = 3×3
     1     4     7
     2     5     8
     3     6    10
```

ステップ1: 1行目の2倍を2行目から、3倍を3行目から引く

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

これは左から $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を掛けるのと等価

```
M1 = [1 0 0; -2 1 0; -3 0 1]
```

```
M1 = 3×3
     1     0     0
    -2     1     0
    -3     0     1
```

```
A1 = M1 * A
```

```
A1 = 3×3
     1     4     7
     0    -3    -6
     0    -6   -11
```

ステップ2: 2行目の2倍を3行目から引いて上三角行列 U を完成させる

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

これは左から $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ を掛けるのと等価

```
M2 = [1 0 0; 0 1 0; 0 -2 1]
A2 = M2 * A1
U = A2
```

すなわち, $M_2 M_1 A = U$ である

この式に左から M_2^{-1} , M_1^{-1} を順に掛けると, $M_1^{-1} M_2^{-1} M_2 M_1 A = A = M_1^{-1} M_2^{-1} U$. ここで $L_1 = M_1^{-1}$, $L_2 = M_2^{-1}$ はともに下三角行列であり, その積 $L = L_1 L_2$ も下三角行列となる

```
L1 = inv(M1)
```

```
L1 = 3×3
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
    0.3333         0    1.0000
```

```
L2 = inv(M2)
```

```
L2 = 3×3
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0    0.5000    1.0000
```

```
L = L1 * L2
```

```
L = 3×3
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
    0.3333    0.5000    1.0000
```

L_1 , L_2 はそれぞれ M_1, M_2 の対角成分より下の成分の符号を反転したものとなることに注意. また, 積 $L_1 L_2$ は L_1 , L_2 の対角成分より下の成分をそのまま埋め込んだものとなる

こうしてLU分解 $A = LU$ が完了する

```
L * U
```

```
ans = 3×3
     1     4     7
     2     5     8
     3     6    10
```

LU分解の例: ピボット選択を行う場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

```
A = [1 4 7; 2 5 8; 3 6 10]
```

```
A = 3×3
     1     4     7
     2     5     8
     3     6    10
```

ステップ1: 1行目と3行目を入れ換え, 1行目の2/3倍を2行目から、1/3倍を3行目から引く

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 2 & 11/3 \end{pmatrix}$$

これは左から $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を順に掛けるのと等価

```
P13 = [0 0 1; 0 1 0; 1 0 0]
```

```
P13 = 3×3
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

```
M1 = [1 0 0; -2/3 1 0; -1/3 0 1]
```

```
M1 = 3×3
    1.0000         0         0
   -0.6667    1.0000         0
   -0.3333         0    1.0000
```

```
A1 = M1 * P13 * A
```

```
A1 = 3×3
    3.0000    6.0000   10.0000
         0    1.0000    1.3333
         0    2.0000    3.6667
```

ステップ2: 2行目と3行目を入れ換え, 2行目の1/2倍を3行目から引く

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

これは左から $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ を順に掛けるのと等価

```
P23 = [1 0 0; 0 0 1; 0 1 0]
```

```
P23 = 3×3
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

```
M2 = [1 0 0; 0 1 0; 0 -1/2 1]
```

```
M2 = 3×3
```

```
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0   -0.5000    1.0000
```

```
A2 = M2 * P23 * A1
```

```
A2 = 3×3
    3.0000    6.0000   10.0000
         0    2.0000    3.6667
         0         0   -0.5000
```

```
U = A2
```

```
U = 3×3
    3.0000    6.0000   10.0000
         0    2.0000    3.6667
         0         0   -0.5000
```

すなわち, $M_2P_{23}M_1P_{13}A = U$ (上三角行列)である

ここで, 互換の2乗は恒等変換 $P_{23}P_{23} = E$ であることを使うと, $M_2P_{23}M_1P_{23}P_{23}P_{13}A = U$ である. さらに, $P_{23}M_1P_{23} = M'_1$, $P_{23}P_{13} = P$ とおくと, $M_2M'_1PA = U$ と書ける

```
P = P23 * P13
```

```
P = 3×3
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

行列に P_{23} を左から掛けると2行目と3行目が入れ替わる. 一方, 右から掛けると2列目と3列目が入れ替わる

```
P23 * M1
```

```
ans = 3×3
    1.0000         0         0
   -0.3333         0    1.0000
   -0.6667    1.0000         0
```

```
M1 * P23
```

```
ans = 3×3
    1.0000         0         0
   -0.6667         0    1.0000
   -0.3333    1.0000         0
```

すなわち, $P_{23}M_1P_{23} = M'_1$ は M_1 の2行目と3行目を入れ替え, さらに2列目と3列目が入れ替えたもの. (結果として, 対角成分より下について2行目と3行目を入れ替えたものとなっている)

```
P23 * M1 * P23
```

```
ans = 3×3
    1.0000         0         0
   -0.3333    1.0000         0
   -0.6667         0    1.0000
```

$L_1 = (M'_1)^{-1}$, $L_2 = M_2^{-1}$ はそれぞれ M'_1 , M_2 の対角成分より下の成分の符号を反転したもの

```
L1 = inv(P23*M1*P23)
```

```
L1 = 3×3
    1.0000         0         0
    0.3333    1.0000         0
    0.6667         0    1.0000
```

```
L2 = inv(M2)
```

```
L2 = 3×3
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0    0.5000    1.0000
```

$L = L_1 L_2$ は L_1 , L_2 の対角成分より下の成分をそのまま埋め込んだもの

```
L = L1 * L2
```

```
L = 3×3
    1.0000         0         0
    0.3333    1.0000         0
    0.6667    0.5000    1.0000
```

こうしてピボット選択付きのLU分解 $PA = LU$ (あるいは $A = P^{-1}LU$)が完了する. ($P_{13}^{-1} = P_{13}$, $P_{23}^{-1} = P_{23}$ は成り立つが $P^{-1} = P$ は成り立たないことに注意)

```
P * A
```

```
ans = 3×3
     3     6    10
     1     4     7
     2     5     8
```

```
L * U
```

```
ans = 3×3
     3     6    10
     1     4     7
     2     5     8
```

```
inv(P) * L * U
```

```
ans = 3×3
     1     4     7
     2     5     8
     3     6    10
```

得られた P , L , U はMATLABのlu()命令で計算したものと一致するはずである

```
[L, U, P] = lu(A)
```

```
L = 3×3
    1.0000         0         0
    0.3333    1.0000         0
    0.6667    0.5000    1.0000
```



```
U = 3×3
    3.0000    6.0000   10.0000
         0    2.0000    3.6667
         0         0   -0.5000
P = 3×3
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

10-7 行列の階数(rank)

対角成分に零が現れるとそれ以上ガウス掃き出し法を進めることができなくなる

ピボット選択(列を適当に入れ替える)により継続が可能になる場合もあるが、どのように入れ替えても対角成分が零になる場合はそこで停止

Uの非零の行の数を行列の階数(rank)という

行列の次元と階数が等しい場合「full rank」、階数が小さい場合「rank落ち」という

rank落ちしている場合、独立な方程式の数は行列の次元の数よりも少ない

例題

例題1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ を掃き出し法によりLU分解せよ

例題2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ を掃き出し法によりLU分解せよ (途中で行の入れ替え(ピボット選択)が必要である)

MATLABによるLU分解

```
A = [1 1; 2 4];
[L, U, P] = lu(A)
```

```
L = 2×2
    1.0000         0
    0.5000    1.0000
U = 2×2
     2     4
     0    -1
P = 2×2
     0     1
     1     0
```

P はどの行とどの行を入れ替えたかを示す置換行列

この例では 1 行目と 2 行目を入れ替えている

L と U を掛けると、A の行を入れ替えたものが得られる

```
L * U
```

```
ans = 2×2
```

```
     2     4
     1     1
```

P' * L * U がもとの A に一致する

```
P' * L * U
```

```
ans = 2×2
     1     1
     2     4
```

MATLABのLU分解は、対角要素が零でない場合でも絶対値が一番大きな行と常に入れ替えを行う(その方が精度がよい)

rank落ちしている例

```
A = [1 2; 2 4];
[L, U, P] = lu(A)
```

```
L = 2×2
    1.0000         0
    0.5000    1.0000
U = 2×2
     2     4
     0     0
P = 2×2
     0     1
     1     0
```

例題

例題3. 以下の問題を 2x2 の行列の形式 $Ax = p$ で表し、それらを LU 分解を用いて解け

- X は Y の 2 倍の年齢であり、彼らの年齢を足すと 33 となる。 X と Y の年齢を求めよ
- $(x, y) = (2, 5)$ と $(3, 7)$ が直線 $y = mx + c$ 上にある。 m と c を求めよ
- 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 $(x, y) = (1, 4), (2, 8), (3, 14)$ を通る。 a, b, c を求めよ

例題4 上の例題1,2のLU分解の結果をMATLABを使って検証せよ

例題5 置換行列は各行各列に1がひとつだけ入り、残りは全て0の行列

例: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
A = rand(3)
```

```
A = 3×3
    0.6312    0.2242    0.3872
    0.3551    0.6525    0.1422
    0.9970    0.6050    0.0251
```

```
P = [0 1 0; 0 0 1; 1 0 0];
P * A
```

```
ans = 3×3
```



```
    0.3551    0.6525    0.1422
    0.9970    0.6050    0.0251
    0.6312    0.2242    0.3872
```

2行目が1行目に、3行目が2行目に、1行目が3行目に移る

上記の置換は、まず1行目と2行目を入れ替え、その後2行目と3行目を入れ替えることで達成できることを確かめよ (順番が重要である)

任意の置換は互換(2つの入れ替え)の合成で書ける. 置換行列の行列式は互換に分解したときの互換の数が偶数の場合1、奇数の場合-1

P が置換行列である場合, P の逆行列は ${}^tP$ で与えられることを証明せよ

例題6 魔法陣は縦横斜めの和が等しい行列である

```
A = magic(5)
```

```
A = 5×5
    17    24     1     8    15
    23     5     7    14    16
     4     6    13    20    22
    10    12    19    21     3
    11    18    25     2     9
```

5x5 の魔法陣の場合、縦横斜めの和は全て65

```
A * [1; 1; 1; 1; 1]
[1 1 1 1 1] * A
trace(A)
```

```
ans = 5×1
    65
    65
    65
    65
    65
ans = 1×5
    65    65    65    65    65
ans = 65
```

(左下から右上への斜めの和はどう書くと得られるか？)

$p = \begin{pmatrix} 65 \\ 65 \\ 65 \\ 65 \\ 65 \end{pmatrix}$ とする. $Ax = p$ を解くと $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られることを確認せよ