

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



第10講 線形写像と連立一次方程式

10-4 連立1次方程式

連立一次方程式の行列表示

$$Ax = p$$

A の逆行列 A^{-1} が存在する場合には、両辺に左から A^{-1} をかけると

$$x = A^{-1}p$$

3つのタイプの連立一次方程式

n 次元連立方程式 (A は $n \times n$ の行列)

1) (一つだけ)解あり

```
A = [1 1; 2 4];  
p = [7; 20];  
det(A)
```

```
ans = 2
```

```
rank(A)
```

```
ans = 2
```

```
inv(A)
```

```
ans = 2x2  
    2.0000   -0.5000  
   -1.0000    0.5000
```

```
inv(A) * p
```

```
ans = 2x1  
    4  
    3
```

A の行列式 $\neq 0$ 、 A の階数(rank) = n 、逆行列が存在

2) 解なし

```
A = [1 2; 2 4];  
p = [7; 20];  
det(A)
```

```
ans = 0
```

```
rank(A)
```

```
ans = 1
```

```
rank([A p])
```

```
ans = 2
```

```
inv(A) %% 警告
```

警告: 行列が特異なため、正確に処理できません。

```
ans = 2×2
     Inf     Inf
     Inf     Inf
```

```
inv(A) * p %% 警告
```

警告: 行列が特異なため、正確に処理できません。

```
ans = 2×1
     Inf
     Inf
```

A の行列式 = 0 , A の階数(rank) < n 、拡大係数行列の階数 > A の階数

3) 解は無数に存在

```
A = [1 2; 2 4];
p = [10; 20];
det(A)
```

```
ans = 0
```

```
rank(A)
```

```
ans = 1
```

```
rank([A p])
```

```
ans = 1
```

```
inv(A) %% 警告
```

警告: 行列が特異なため、正確に処理できません。

```
ans = 2×2
     Inf     Inf
     Inf     Inf
```

```
inv(A) * p %% 警告
```

警告: 行列が特異なため、正確に処理できません。

```
ans = 2×1
     Inf
     Inf
```

A の行列式 = 0 、 A の階数(rank) < n 、拡大係数行列の階数 = A の階数

MATLABでの連立一次方程式の求解

```
A = [1 1; 2 4];
p = [7; 20];
x = A \ p
```

```
x = 2×1
     4
     3
```

'/' ではなく '\ ' を使うことに注意!

例題

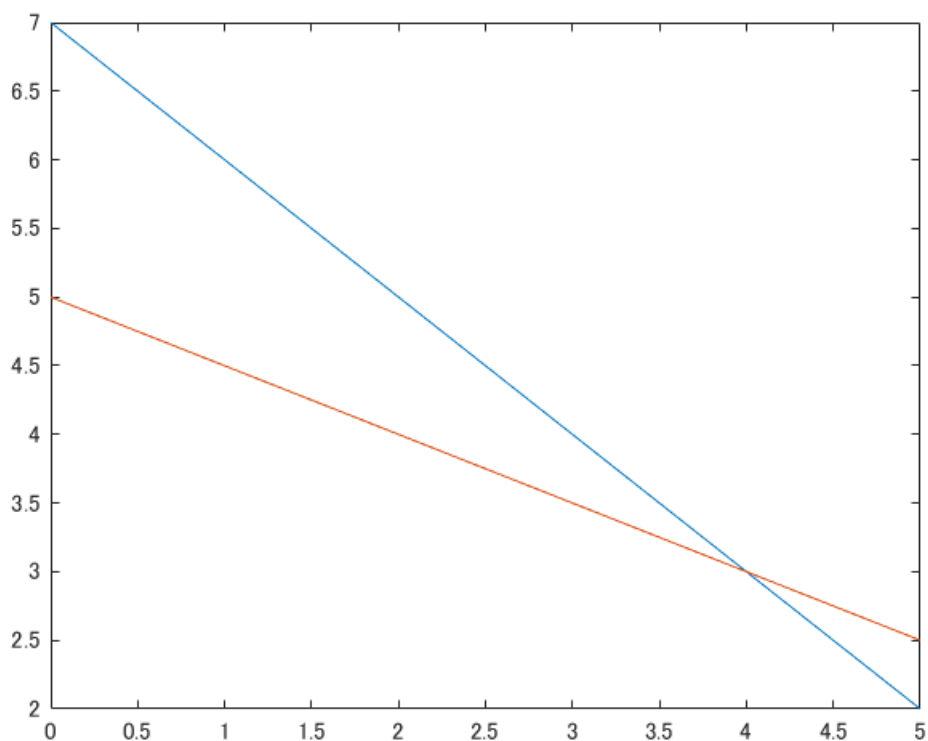
なぜMATLABでは p/A と書かずに $A \setminus p$ と書くのか？

10-5 幾何学的意味

直線の交点

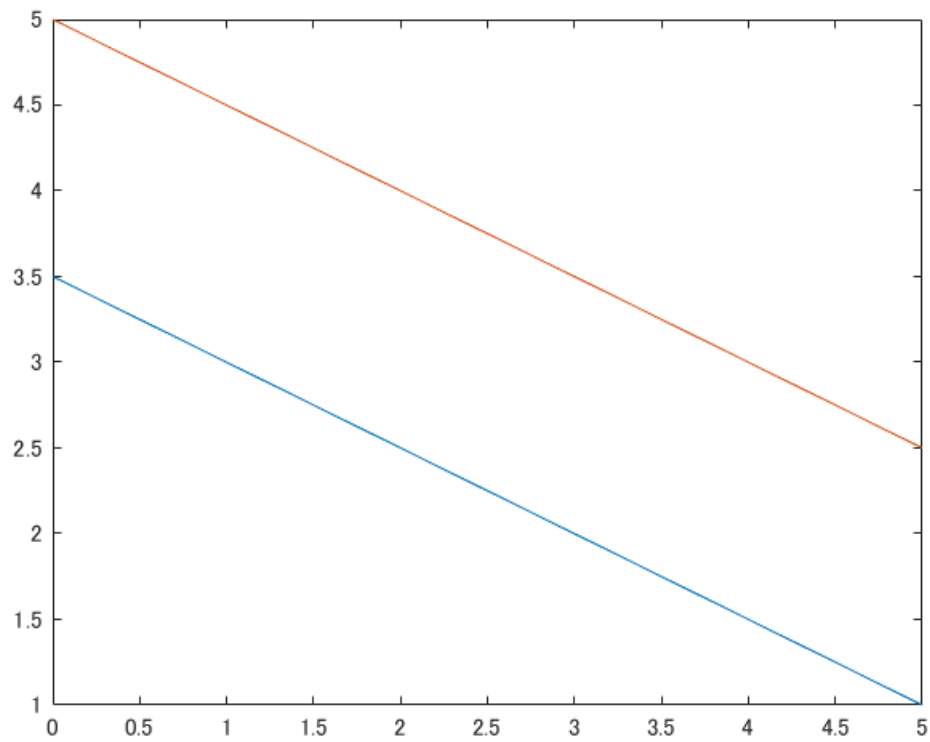
1) 2本の線が1点で交わる

```
x = linspace(0,5);
y1 = 7 - x; %% x + y = 7
plot(x, y1)
hold on
y2 = (20 - 2*x) / 4; %% 2x + 4y = 20
plot(x, y2)
hold off
```



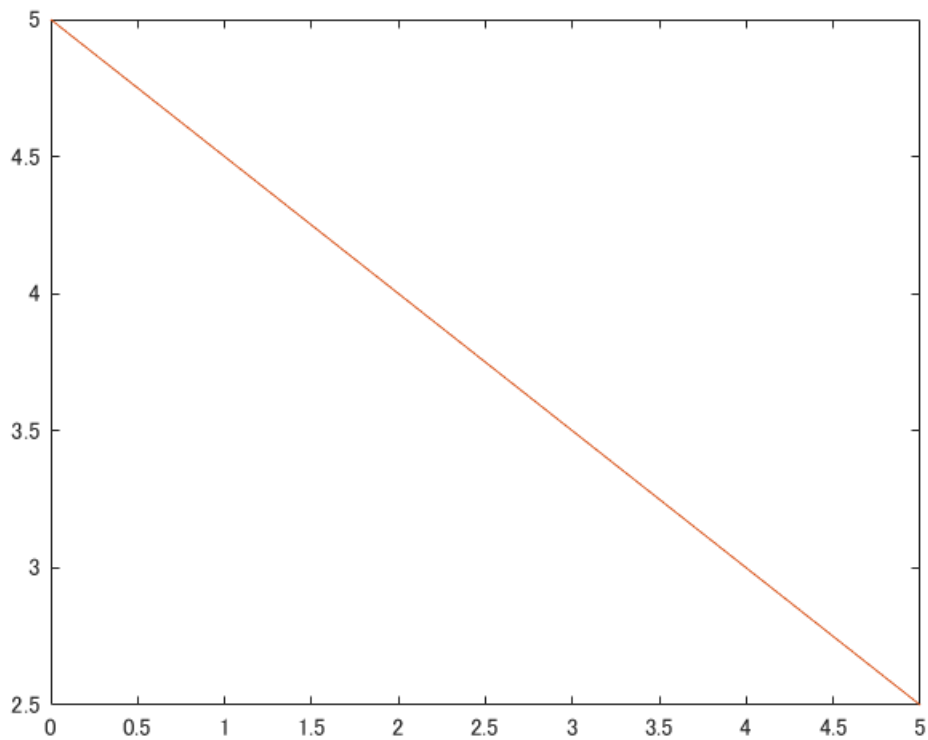
2) 2本の線が平行

```
x = linspace(0,5);
y1 = (7 - x) / 2; %% x + 2y = 7
plot(x, y1)
hold on
y2 = (20 - 2*x) / 4; %% 2x + 4y = 20
plot(x, y2)
hold off
```



3) 2本の線が一致

```
x = linspace(0,5);  
y1 = (10 - x) / 2; %% x + 2y = 10  
plot(x, y1)  
hold on  
y2 = (20 - 2*x) / 4; %% 2x + 4y = 20  
plot(x, y2)  
hold off
```

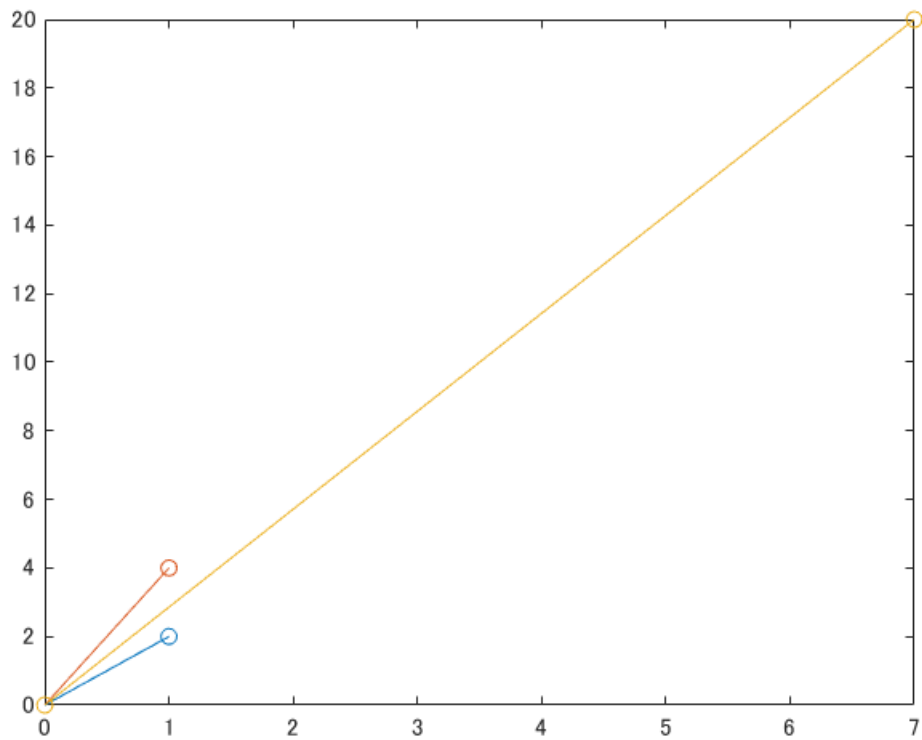


ベクトルの線形結合

$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ と列ベクトルの和(線形結合という)で表される

1) 2本のベクトルが並行ではないので, 足し引きすることで任意の点を表せる

```
v1 = [0 1; 0 2];
plot(v1(1,:), v1(2,:), "-o")
hold on
v2 = [0 1; 0 4];
plot(v2(1,:), v2(2,:), "-o")
v3 = [0 7; 0 20];
plot(v3(1,:), v3(2,:), "-o")
hold off
```

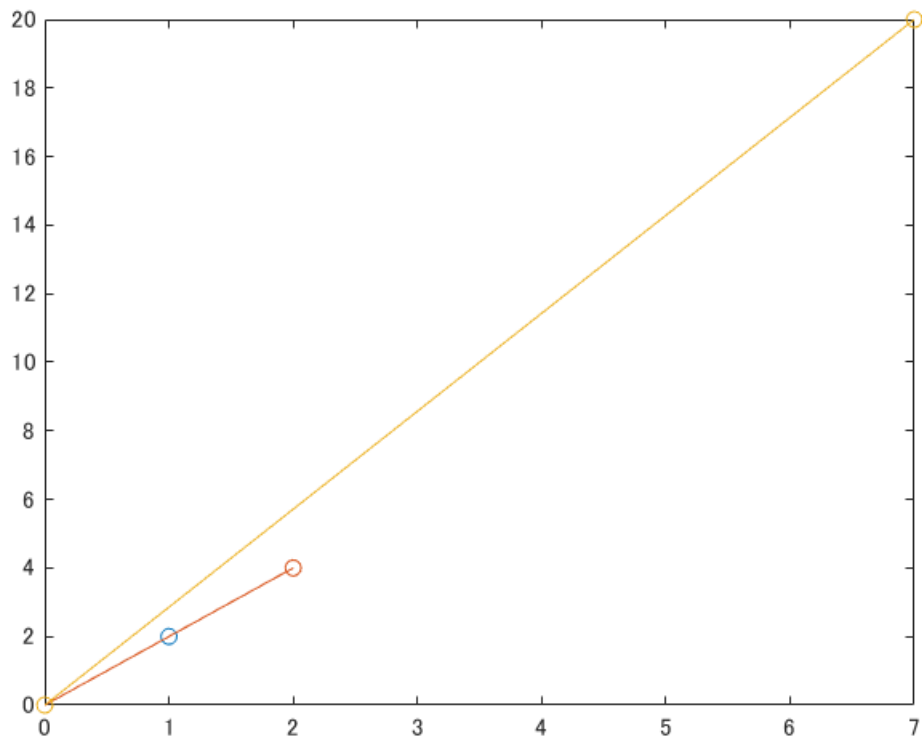


2) 2本のベクトルが並行で, p はその線に乗っていない. どんな組み合わせを作っても無理

```

v1 = [0 1; 0 2];
plot(v1(1,:), v1(2,:), "-o")
hold on
v2 = [0 2; 0 4];
plot(v2(1,:), v2(2,:), "-o")
v3 = [0 7; 0 20];
plot(v3(1,:), v3(2,:), "-o")
hold off

```

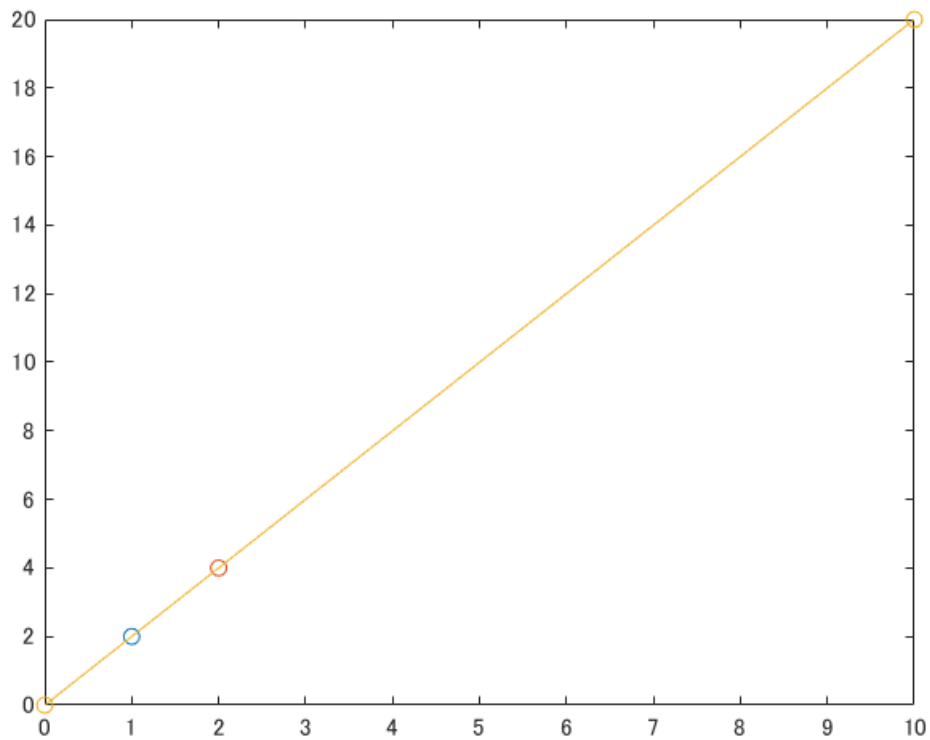


3) 2本のベクトルが並行で, p はその線に乗っている. 組み合わせは無限

```

v1 = [0 1; 0 2];
plot(v1(1,:), v1(2,:), "-o")
hold on
v2 = [0 2; 0 4];
plot(v2(1,:), v2(2,:), "-o")
v3 = [0 10; 0 20];
plot(v3(1,:), v3(2,:), "-o")
hold off

```

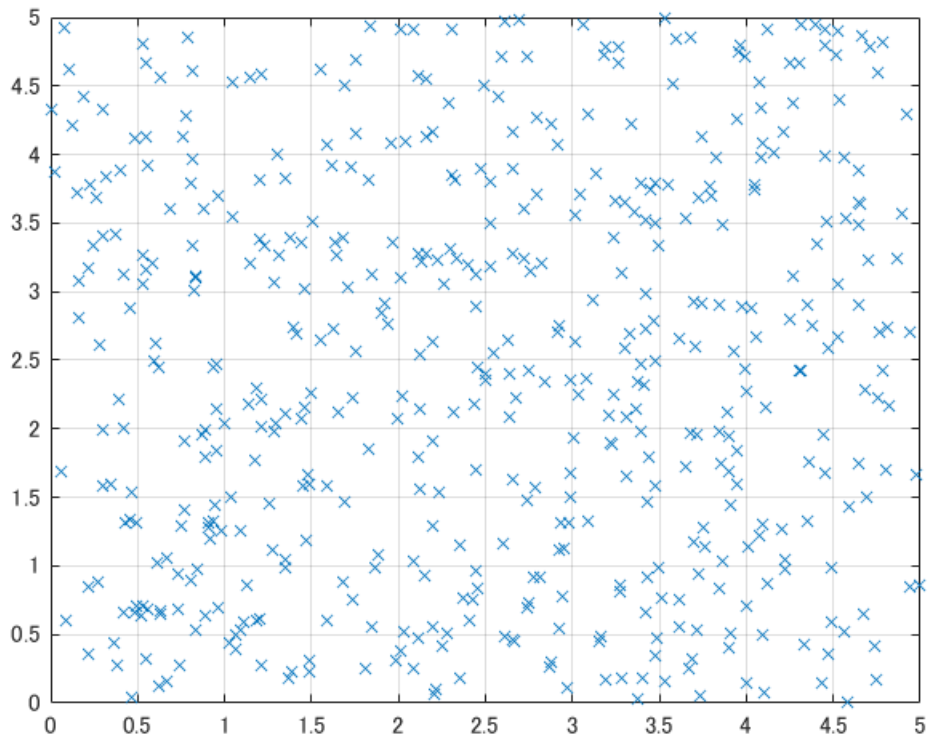



ベクトルの変換

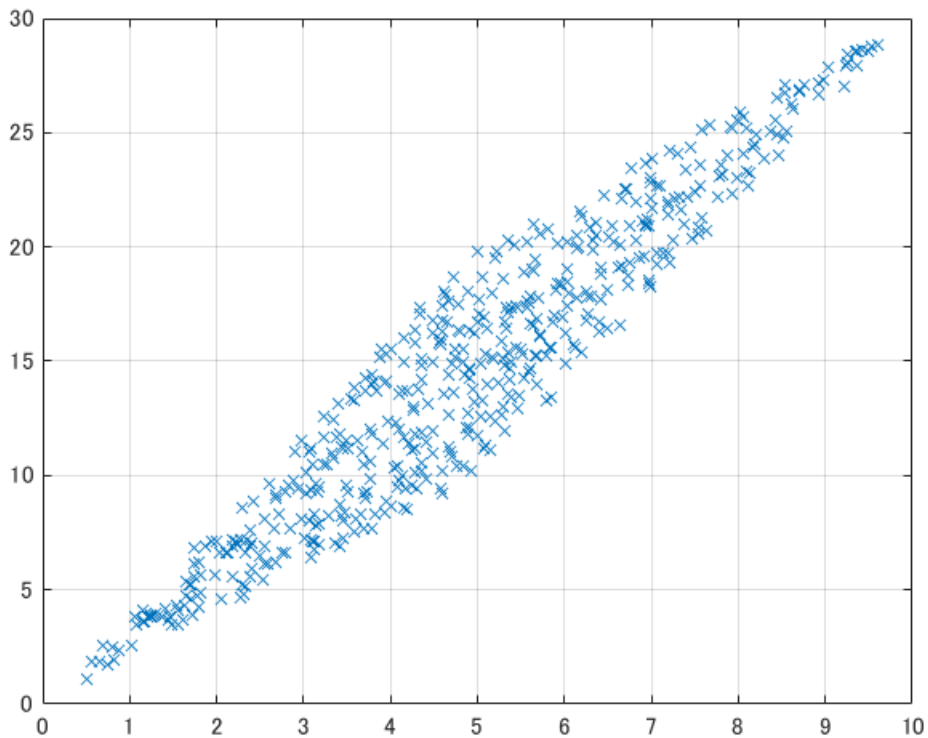
行列とベクトルの積はベクトルを入力として取り、同じ次元のベクトルを出力する関数(変換あるいは写像ともいう)とみなすことができる

1) 全平面から全平面への写像

```
A = [1 1; 2 4];  
X = 5 * rand(2,500); % 500のランダムな点を生成  
plot(X(1,:), X(2,:), "x")  
grid on
```

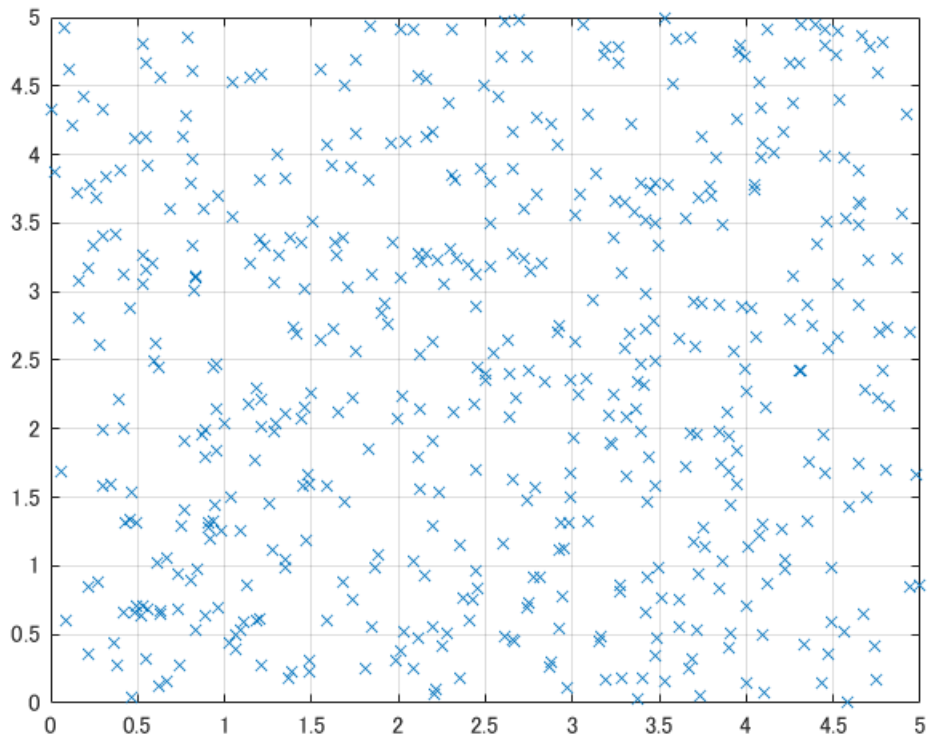


```
P = A * X;
plot(P(1,:), P(2,:), "x")
grid on
```

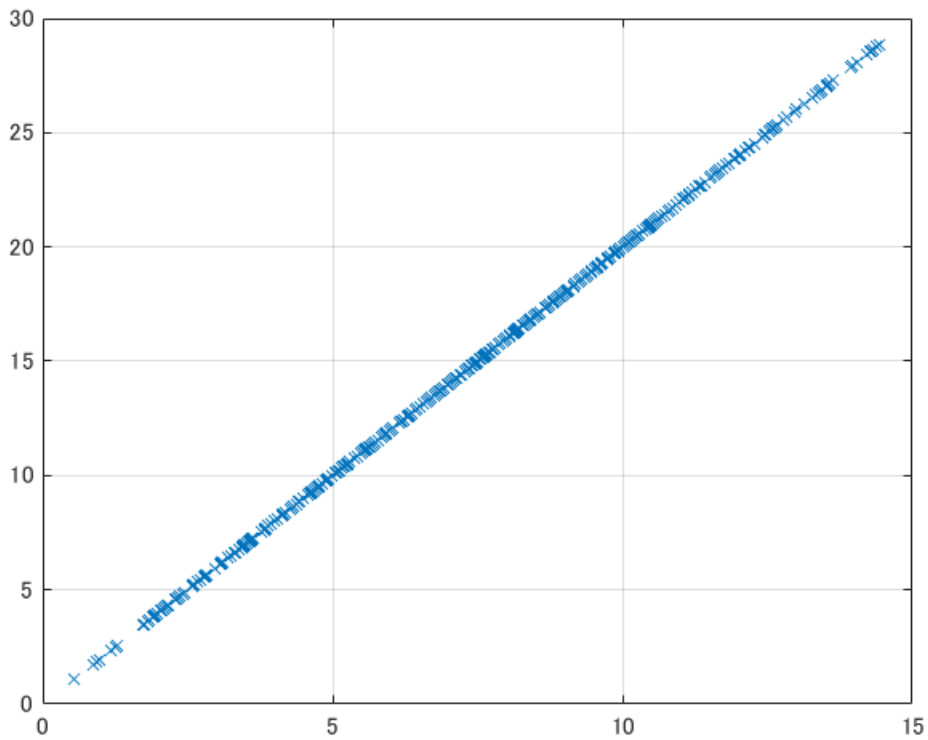


2,3) 全平面から直線への写像

```
A = [1 2; 2 4];
plot(X(1,:), X(2,:), "x")
```



```
P = A * X;
plot(P(1,:), P(2,:), "x")
grid on
```



p がその線上に乗っていない場合には解なし(2)。線上に乗っている場合には無限個の解がある(3)