クレジット：

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

第10講　線形写像と連立一次方程式

10-1 線形写像の性質

行列の掛け算はベクトルからベクトルへの線形写像を与える

- 原点は原点に (零ベクトルは零ベクトルに)
- ベクトルの和の線形変換はそれぞれのベクトルの線形変換の和: $A(x+y) = Ax + Ay$
- ベクトルの定数倍の線形変換はベクトルの線形変換の定数倍: $A(ax) = aAx$

まとめると $A(ax + by) = aAx + bAy$

10-2 二次元線形写像の例

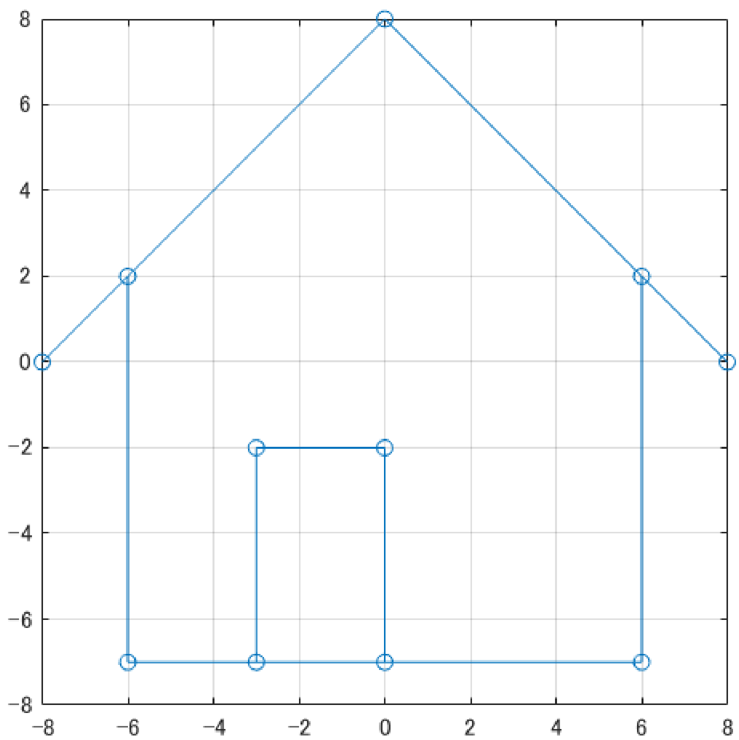
```
H = [-6 -6 -8 0 8 6 6 -3 -3 0 0 -6;
     -7 2 0 8 0 2 -7 -7 -2 -2 -7 -7]
```

```
H = 2×12

    -6    -6    -8     0     8     6     6    -3    -3     0     0    -6
    -7     2     0     8     0     2    -7    -7    -2    -2    -7    -7
```

11点からなる家の図形 (ストラング「線形代数イントロダクション」から)

```
plot(H(1,:), H(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

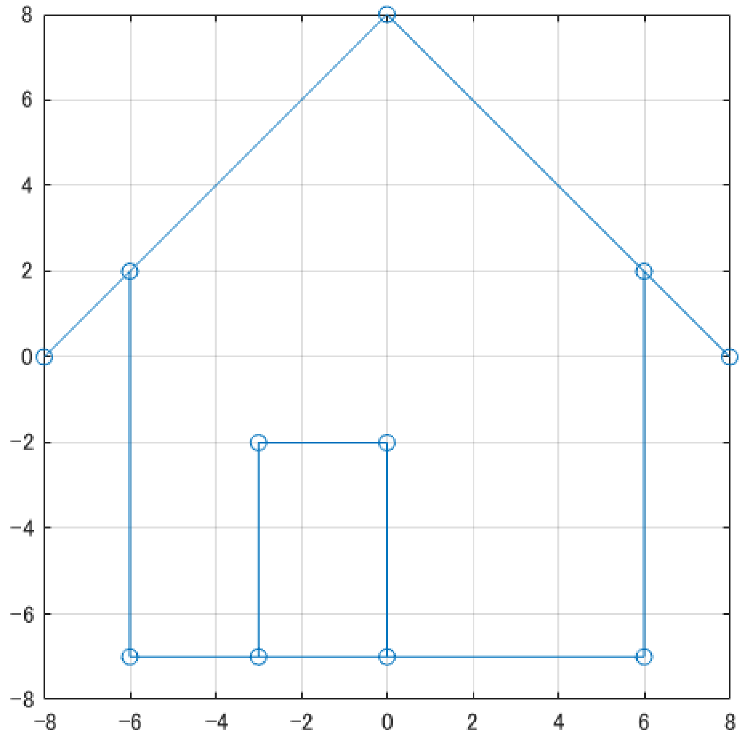


以下の行列による線形写像で、家の絵はどのように変換されるか？まずベクトル $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ が

どのように変換されるかを考え、家の絵がどのように変換されるか予想し、MATLABを実行し、確認せよ

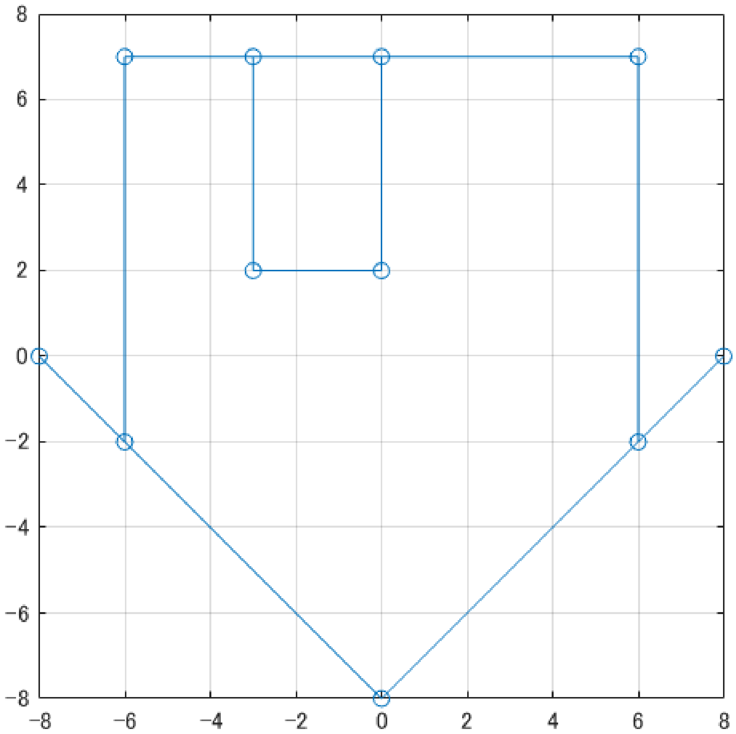
単位行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
C = eye(2) * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```



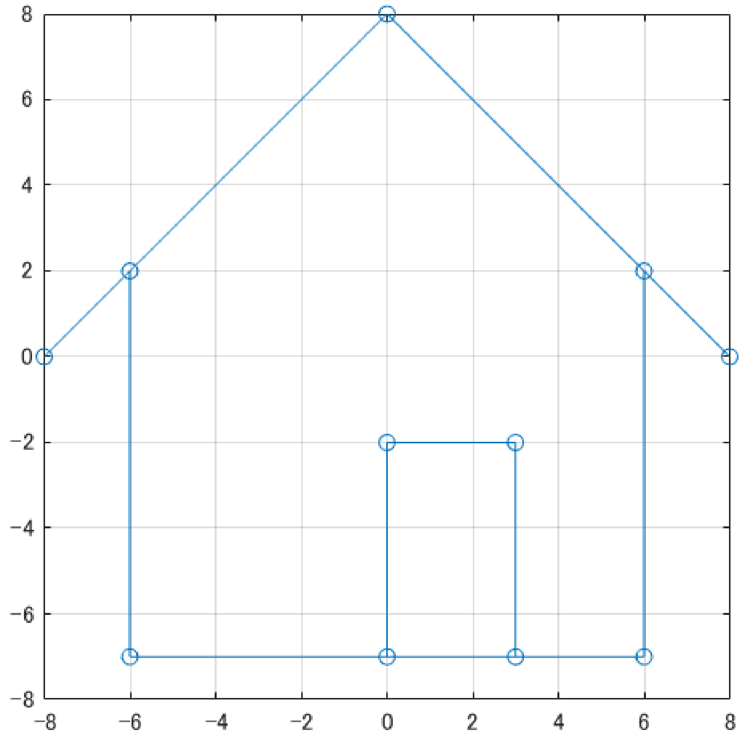
対角行列 $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

```
Ax = [1 0; 0 -1];
C = Ax * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```



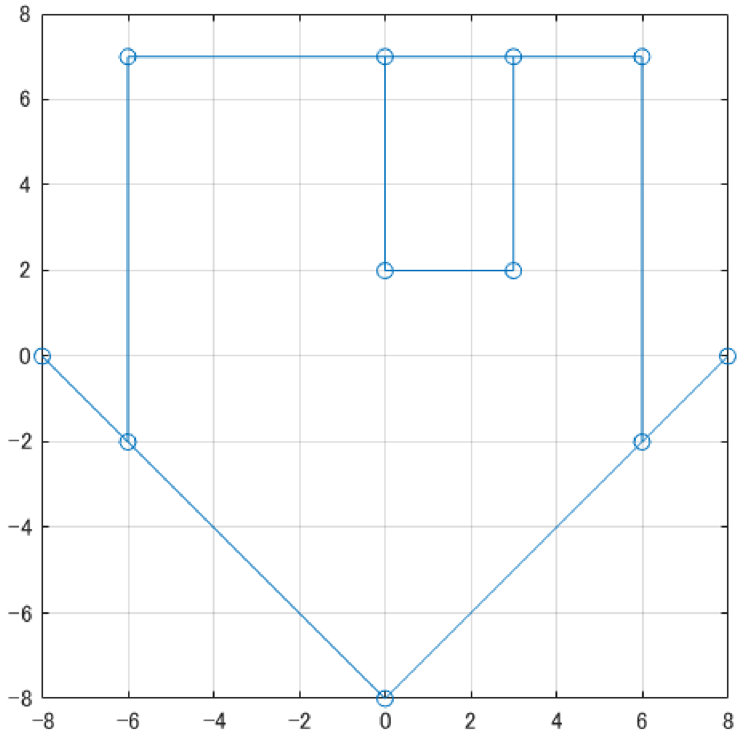
対角行列 $A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
Ay = [-1 0; 0 1];
C = Ay * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

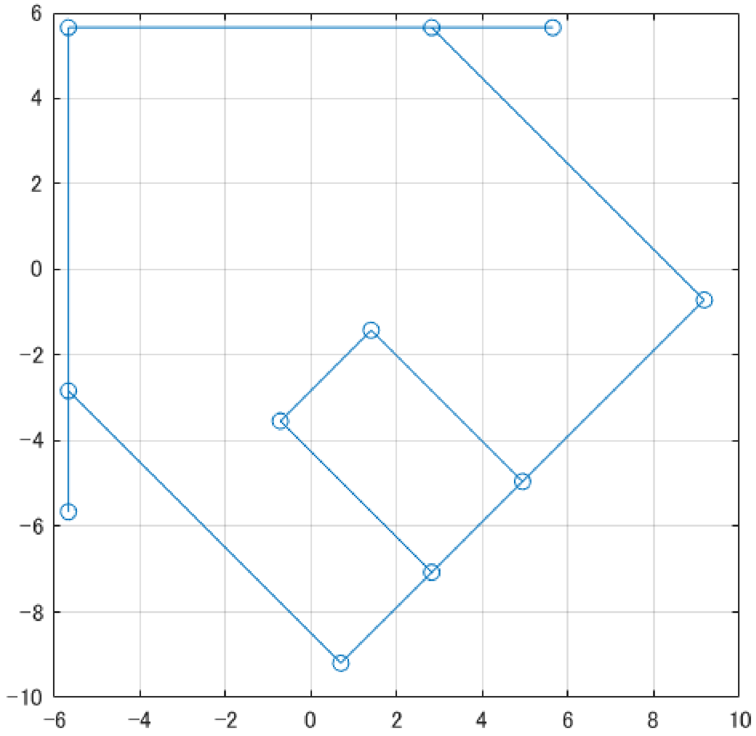
対角行列 $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

```
AO = [-1 0; 0 -1];
C = AO * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

回転行列 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} (\theta = \frac{\pi}{4})$

```
t = pi/4;
Rt = [cos(t) -sin(t); sin(t) cos(t)];
C = Rt * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

直交行列

E , A_x , A_y , A_O は対称行列 (転置行列が自身と一致)

$A_xA_y = A_yA_x = A_O$ (A_x と A_y は交換する)

$$A_x^2 = A_y^2 = A_O^2 = E$$

転置行列が自身と一致するので ${}^tA_xA_x = {}^tA_yA_y = {}^tA_OA_O = E$ も成り立つ

回転行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\theta = \pi$ (180度)の時、 A_O と一致

$$R_\theta R_{-\theta} = E$$

$$R_\theta の逆行列はR_{-\theta} = {}^tR_\theta$$

ここまでの行列はすべて転置が逆行列になっている

直交行列と呼ぶ

直交行列は行列式が1または-1

図形の変換前と変換後の面積が保存

直交行列による線形写像を直交変換と呼ぶ

変換前に直角をなしていた2つのベクトルは変換後も直角

例題

1. 2次元実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列である(${}^tAA = E$)とする。その時、 A の行列式は1または-1であることを示せ

2. $n \times n$ 実行列 A が直交行列である(${}^tAA = E$)とする。その時、ベクトル x_1 と x_2 の内積 (${}^tx_1x_2$)は A による変換後 ($y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$)も変わらないことを式で示せ。また、MATLABでランダムな直交行列とランダムなベクトルを何組か作り、変換により内積が不変であることを確認せよ

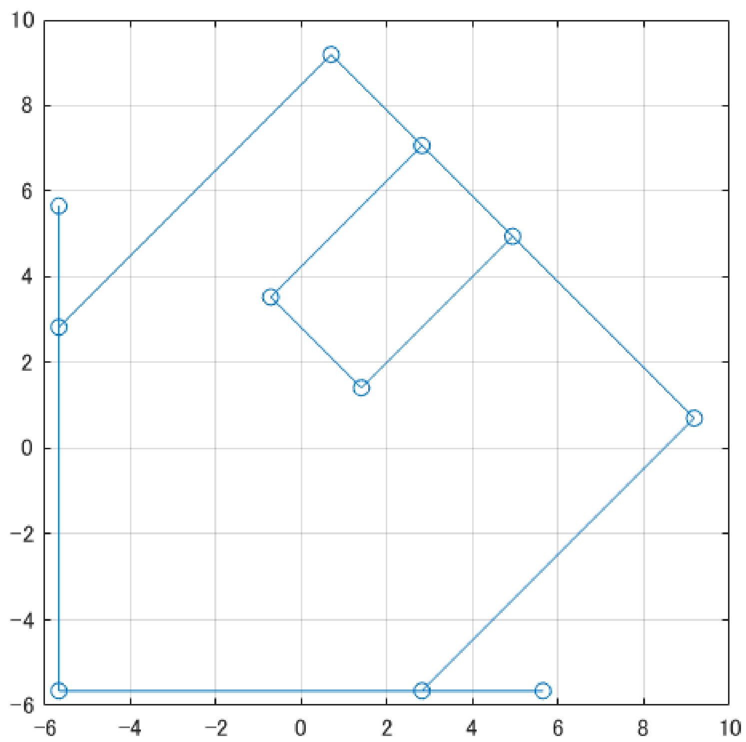
線形写像の合成

線形写像の合成は行列の積で表される (そうなるように行列の積を定義した)。変換の順番「右から左に」

変換の順番は重要。一般に $ABx \neq BAx$ (行列の非可換性 $AB \neq BA$)

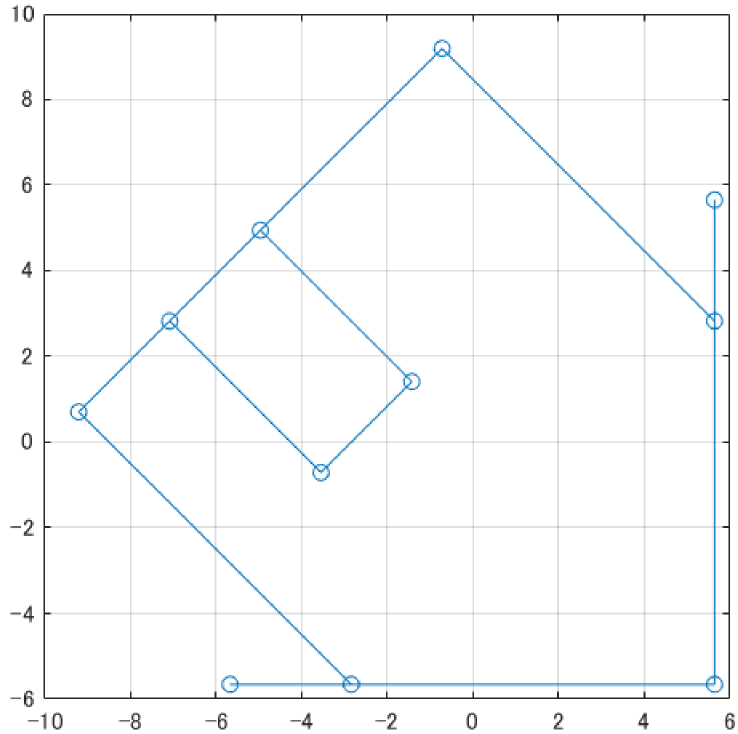
R_θ のあと A_x による変換 (A_xR_θ による変換)

```
C = Ax * Rt * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```



A_x のあと R_θ による変換 ($R_\theta A_x$ による変換)

```
C = Rt * Ax * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

順番を変えると結果が異なる → 行列の非可換性

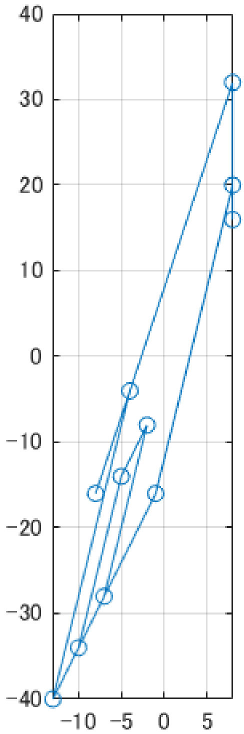
直交行列の積は再び直交変換(合成した線形変換でも角度は保存、面積も保存)

一般の線形写像

一般の行列による線形写像は角度も面積も保存しない

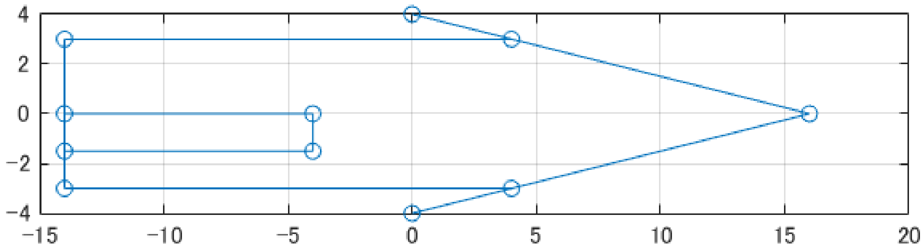
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A1 = [1 1; 2 4];
C = A1 * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

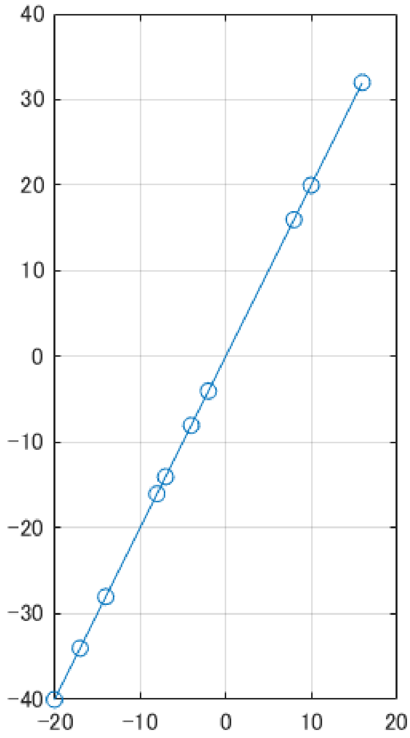
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A2 = [0 2; 0.5 0];
C = A2 * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A3 = [1 2; 2 4];
C = A3 * H;
plot(C(1,:), C(2,:), "o-")
daspect([1 1 1])
grid on
```

10-3 線形写像と行列式

変換後の図形の面積は「行列式の絶対値」倍になる

行列式が負の場合、図形は裏返る

```
det(A1)
```

```
ans = 2
```

```
det(A2)
```

```
ans = -1
```

```
det(A3)
```

```
ans = 0
```

一般の $n \times n$ 行列の場合

n 次元空間のベクトルから n 次元空間のベクトルへの写像を与える

行列の行列式が零の場合

- 変換後の点は m 次元 ($m < n$)の点や面の上に乗る
- m は行列の階数

例題

3. 行列 A による二次元の単位ベクトル $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形変換を考える。変換後、二つのベクトルは平行四辺形を形作るがその面積は A の行列式の絶対値で与えられることを示せ

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は階数2の行列である ($n = 3$, $m = 2$)

```
A = [1 4 7; 2 5 8; 1 1 1];
det(A)
```

```
ans = 0
```

```
rank(A)
```

```
ans = 2
```

この行列による線形写像により3次元の全ての点が一枚の平面に乗ることをグラフを描いて確かめよ(参考「10-5 幾何学的意味」の最後のランダムな点の生成とその変換)