クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ｉ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫



東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

cc BY NC ND

# 線形写像

線形空間 $V_1$ から 線空間 $V_2$ への写像 $f$

$$v \in V_1 \xrightarrow{f} f(v) \in V_2$$

▷ $f(av) = af(v)$

▷ $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

※ 線形写像は 行列を用いて書くことができる

$V_1$ の基底 $e_1 \cdots e_n$

$V_2$ の基底 $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_m$

$V_1$ の任意の元は $e_i$ の線形和で書ける

$v \in V_1 \quad v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n \quad v_i \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

$$= \sum_{i=1}^{m} v_i e_i$$

$v_i$: $v$ の成分

$e_i \in V_1$ 　 $f(e_i)$ : $V_2$ の元 　 $V_2$ の基底の和で書けるはず

$$\boxed{f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{e}_j \, a(j,i)}$$

$A = [a(i,j)]_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$ 行列

成分で書くと 　 $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ 　 $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 　 $n \times 1$ ベクトル

$A$ : $n \times m$ 行列 　 $v$ : $n \times 1$ ベクトル

$f(v) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{e}_j$ 　 $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ 　 $m \times 1$ ベクトル

$v$ と $w$ の関係は

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

証明) $f(v) = f(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(v_i e_i)$$

fの線形性

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i)$$

基底の変換

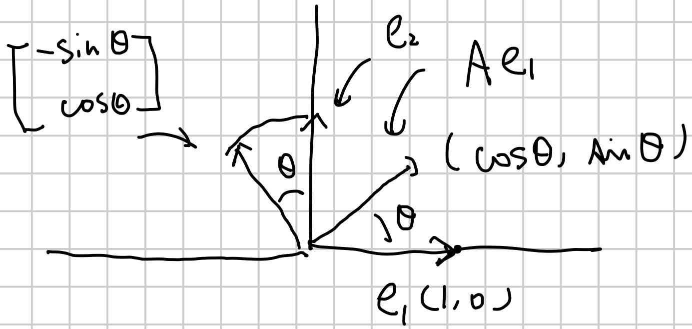
$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{m} a(j,i) \tilde{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Big( \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a(j,i) v_i}_{= w_j} \Big) \tilde{e}_j$$

$\Rightarrow w = Av$

# 線形写像の具体例

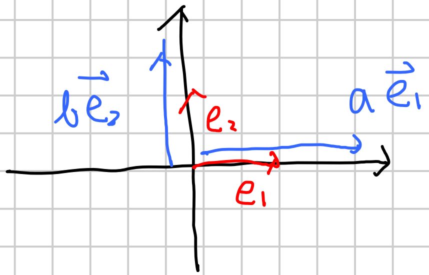
$V = \mathbb{R}^2$　　$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v$




例1)　回転　$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$　　A: 2次元空間 角度θ 回転

$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$




例2)　拡大　$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$　対角行列

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　　$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

・$e_i$ : 正規直交基底 $e_i = \begin{bmatrix} u(i,1) \\ \vdots \\ u(i,n) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$

$$A = a_1 e_1 \cdot e_1^* + a_2 e_2 \cdot e_2^* + \cdots + a_n e_n \cdot e_n^*$$

$$\begin{cases} e_i : n \times 1 & e_i^* : 1 \times n \qquad e_i \cdot e_i^* : n \times n \text{ 行列} \\ a_i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$$ クロネッカーのデルタ

$$\boxed{※ \quad A \cdot e_i = a_i e_i}$$ Aは $e_i$ 方向を $a_i$ 倍する変換

固有値方程式

$e_i$ : 固有ベクトル

$a_i$ : 固有値

# § 連立一次方程式の解法

## 連立一次方程式

$a(i,j)$ $\quad i=1\sim m,\quad j=1\sim n$

$x_i$ : $\quad i=1\sim n$ 求めるべき数の集合

$p_i$ : $\quad i=1\sim m$

$$\begin{cases} a(1,1)x_1 + \cdots + a(1,n)x_n = p_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a(m,1)x_1 + \cdots + a(m,n)x_n = p_m \end{cases}$$

## 行列表示

$$A = [a(i,j)]_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}$$

matlab

$x = \text{linsolve}(A, p)$

$$\boxed{A \cdot x = p}$$

# 連立一次方程式

(I) 解 $x$ が一意に定まる

(II) 解が存在しない

(III) 解が無限に存在

## 具体例

① $x+2y=7 \quad \cdots (A)$

$2x+4y=20 \quad \cdots (B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$(B)-2(A)$ $\quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{r} 2x+4y=20 \\ 2x+4y=14 \\ \hline 0=6 \end{array}$$

解なし.

② $x+y=7$

$2x+4y=20$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$(B)-(A)\cdot 2$

$$\begin{array}{r} 2x+4y=20 \\ -)\ 2x+2y=14 \\ \hline 2y=6 \end{array} \quad y=3$$

解が一意に定まる

$x=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

③ $x+2y=7$

$2x+4y=14$

解は無限に存在

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$(B)-2(A)$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{r} 2x+4y=14 \\ -)\ 2x+4y=14 \\ \hline 0=0 \end{array}$$

一つの方程式のみ.

方程式　$A \cdot x = p$

仮に　$A$：正方行列で　$A^{-1}$ が存在する．

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot x = A^{-1} p \qquad \boxed{x = A^{-1} \cdot p}$$

**基本変形**

$$\begin{cases} a(1,1)x_1 + \cdots + a(1,n)x_n = p_1 & \cdots\cdots (1) \\ \vdots & \vdots \\ a(m,1)x_1 + \cdots + a(m,n)x_n = p_m & \cdots\cdots (m) \end{cases}$$

[I]　$i$ 番目の式 $(i)$ を $k$ 倍する

$$a(i,1)x_1 + \cdots + a(i,n)x_n = p_i$$

$$\downarrow$$

$$ka(i,1)x_1 + \cdots + ka(i,n)x_n = kp_i$$

[II] $(i) \to (i) + k(j)$

[III] i番目の式と j番目の式を入れかえる $(i) \longleftrightarrow (j)$

(I) 〜 (III) を行列で書きたい

拡大係数行列 $Ax = p$ $A : m \times n$ $x = n \times 1$, $p = m \times 1$

拡大係数行列 $\tilde{A} = (\underbrace{A}_{m \times n}, \underbrace{p}_{m \times 1})$ : $m \times (n+1)$ 行列

## 基本操作

[I]

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a(1,1) & \cdots & a(1,n) & p_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a(i,1) & \cdots & a(i,n) & p_i \\ \vdots & & & \vdots \\ a(m,1) & \cdots & a(m,n) & p_m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a(1,1) & \cdots & a(1,n) & p_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ k\,a(i,1) & \cdots & k\,a(i,n) & k\,p_i \\ \vdots & & & \vdots \\ a(m,1) & \cdots & a(m,n) & p_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}}_{I(i,k)} \tilde{A}$$

[II]

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & \ddots & & \\ a(i,1) & \cdots & a(i,n) & p_i \\ \vdots & & & \vdots \\ a(j,1) & \cdots & a(j,n) & p_j \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(i,1) + k\,a(j,1) & \cdots & a(i,n) + k\,a(i,n) & p_i + k p_j \\ a(j,1) & & a(j,n) & p_j \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & j \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}}_{} \tilde{A}$$

$\mathrm{II}(i,j;k)$

[III]

$$\mathrm{III}(i,j) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & j \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & & & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \ddots 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{A} \Rightarrow \mathrm{III}(i,j)\,\tilde{A}$$

方程式の書きかえ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{拡大係数行列に左から } m\times m \text{ 行列をかける}}$

**定理** 基本変形のくりかえしにより $\tilde{A}$ は次の形に書きかえることが可能

$$\tilde{A} = (A, p)$$

$A$: $m\times n$ 行列　$p$: $m\times 1$ 行列

$\tilde{A}$ = $m\times(n+1)$ 行列

$$\Big\downarrow \ \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$$

$$\tilde{A}' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad n \quad & \ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ m-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \quad B \quad & r \\ \hline O & s \end{array}\right] \end{array}$$

$B$: $k\times n$ 行列

$r$: $k\times 1$ 行列

$s$: $(m-k)\times 1$ 行列

$B$ のサイズ $k$: 行列 $A$ の階数 (rank)

$$\sum_j B(i,j)\, x_j = r_i$$

$$0 = s_j \quad (j = 1 \sim m-k)$$

分類)　$s \neq 0$ の場合　$0 = s_j$ → 解が存在しない

$s = 0$　〃　解が存在

$k = n$ : $B$ 正方行列　$B^{-1}$ 存在する

→ 解が一意に定まる

$k \ (= \mathrm{rank}(A)) < n$ の場合

→ 解が無限個存在する

# LU分解

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

基本変形を用いて簡単化

(i) $a_1 \neq 0$

$\begin{cases} 2\text{行目から}\ 1\text{行目の}\ \dfrac{a_2}{a_1}\ \text{倍をひく} \\ 3\ \text{〃}\ \ \text{〃}\ \ \dfrac{a_3}{a_1}\ \text{〃} \end{cases}$

$$A \to \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_2' \\ b_3' \end{matrix} & \begin{matrix} c_2' \\ c_3' \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_2/a_1 & 1 & 0 \\ -a_3/a_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\text{〃} \quad A^{(1)}$$

$$\begin{cases} b_j' = b_j - \dfrac{a_j b_1}{a_1} \\ c_j' = c_j - \dfrac{a_j c_1}{a_1} \end{cases}$$

$b_2' \neq 0$ と仮定

3行目から 2行目 $\times \dfrac{b_3'}{b_2'}$ をひく.

上三角行列 $U$

$$A^{(1)} \to \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & 0 & c_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_3'/b_2' & 1 \end{bmatrix} A^{(1)} = A^{(2)}$$

方程式は

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1 & \to x \text{がきまる} \\ b_2' y + c_2' z = p_2' & \to y \text{がきまる} \\ c_3'' z = p_3'' & \to z = \dfrac{p_3''}{c_3''} \end{cases}$$

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} = L$$

下三角行列

$$\boxed{LA = U} \Rightarrow A = L^{-1} \cdot U$$

$L^{-1} \to L$ かきかえ

$A = \underline{L}\ \underline{U}$ "LU分解"

下三角　上三角

lu(A)