クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

第8講 線形空間

8-3 線形結合

V に属する k 個の元 $v_1, v_2, \cdots v_k$ に関して

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$$

を線形結合(1次結合)という

$V = R^3$ の例)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

二次の多項式の例)

$v_1 = 1, v_2 = x^2, v_3 = x^2 + 1$ から $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (c_2 + c_3)x^2 + (c_1 + c_3)$

8-4 線形独立・線形従属

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = O$ が自明でない(すべての j に対して $c_j \neq 0$ ではない)係数について成り立つならば, そのとき $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は「線形従属(1次従属)」であるという

線形従属でない(すべての j に対して $c_j = 0$ である時のみ成り立つ)場合に $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は「線形独立(1次独立)」であるという

例題) [手計算]

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

について

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = O$$

を解き、 v_1, v_2 が線形独立であることを示せ

例題) [手計算] $v_1 = 1, v_2 = x^2, v_3 = x^2 + 1$ について $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ を解き、 v_1, v_2, v_3 が線形従属であることを示せ

8-5 線形独立性と行列式

n 次正方行列 A に対して, その j 列目の列ベクトルを a_j とおく. このとき, A の行列式 $\det(A) \neq 0$ であるなら, n 個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は線形独立である

証明: 次の方程式を考える.

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = O$$

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおき, 行列形式に書き換えると

$$Ax = O$$

$\det(A) \neq 0$ であるなら, A^{-1} が存在するので, それを両辺に左からかけると, 自明な解 $x = O$ しか存在しないことがわかる.

逆に $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が線形独立であれば, 常に $\det(A) \neq 0$ が成り立つことも示せる

例題) [MATLAB] 行列式を計算し、

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

が線形従属であることを示せ

例題) [MATLAB] 行列式を計算し、

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

が線形独立であることを示せ

8-6 線形独立・線形従属の幾何学的意味

二次元の場合を考える。

行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式は、 $\det(A) = ad - bc$ で与えられる。

$a \neq 0$ の場合を考えると、行列式が 0 の場合、 $d = bc/a$ が成り立つ。このとき、
$a_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \dfrac{b}{a}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \dfrac{b}{a}a_1$ すなわち a_2 は a_1 の定数倍となり、二次元平面上に a_1, a_2 をプロットすると同一直線上に乗る

例題) [手計算] 上の議論では $a \neq 0$ を仮定した。 $a = 0$ の場合はどうなるか考えよ

例題) [MATLAB]

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ の行列式は 0 である。ベクトル

$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ と $a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ をプロットし、同一直線上に乗っていることを確認せよ

例題) [手計算] 上の例題で a_1 と a_2 のなす角度が π であることを示せ

例題) [手計算]

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式は非ゼロである。この時、任意のベクトル

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ がベクトル $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ と $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の線形結合で表されることを示し、

その係数 c_1, c_2 を求めよ

次に三次元の場合を考える。3つのベクトル v, w, x が線形従属である時は、これらは同一平面上(あるいは同一線上)にある。線形独立である時は、同一平面上にはない

例題) [MATLAB]

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ をプロットし、これらが同一平面上にあることを確認せよ

例題) [MATLAB]

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ をプロットし、これらが同一平面上にはないことを確認せよ

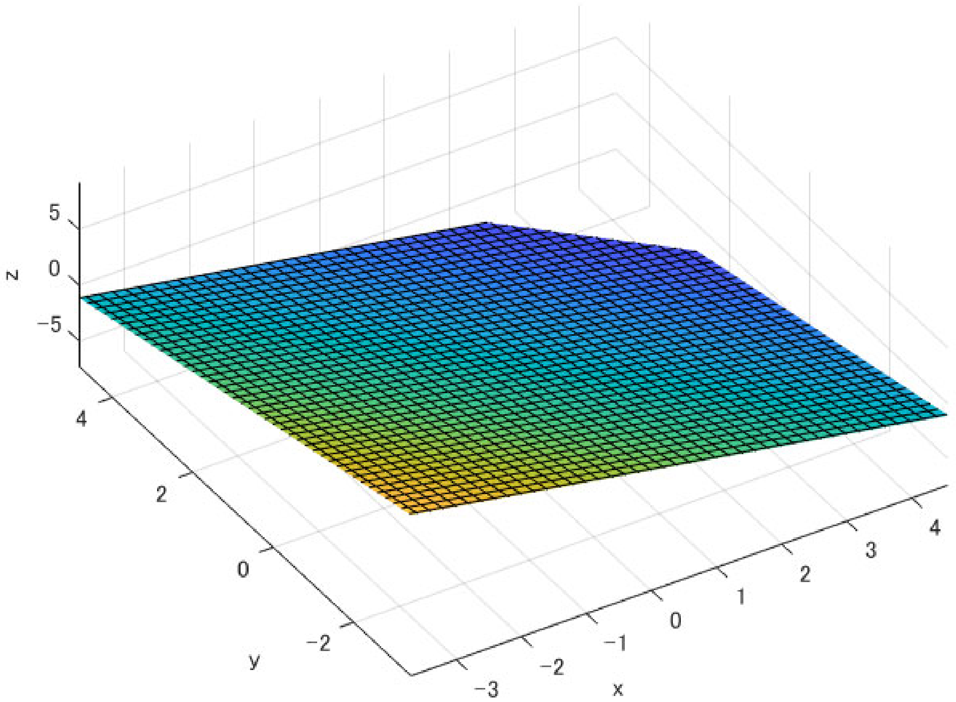
8-7 部分空間

$x + y + z = 0$ を満たす実数の組 (x, y, z) のなす集合を考える

$x + y + z = 0$ は三次元空間中の原点を通る平面の方程式を表す。 $z = -x - y$ と書き換えると z は x, y の関数(二変数関数)

例題) [MATLAB] $x + y + z = 0$ が表す平面をプロットせよ

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.2:5);
z = -x-y;
surf(x, y, z)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```



$x + y + z = 0$ を満たすベクトル

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は、 $x + y + z = 0$ が表す平面上にある

例題) [MATLAB] ベクトル

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ をプロットし、$x+y+z=0$ 上にあることを確認せよ。

また、 v_1, v_2 が同一直線上にはないことを確認せよ

例題) [手計算] $x + y + z = 0$ を満たす任意のベクトル

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は v_1, v_2 の線形結合で表されることを示せ

今の例の場合、 (x, y, z) の三次元空間中の $x + y + z = 0$ の条件を満たす点の集合 ⇒ 3 (もともとの次元) - 1 (条件の数) = 2 (平面) ⇒「部分空間」という

この部分集合(平面)内の互いに線形独立な2本のベクトルを持ってくれば、この部分集合(平面)の元はそれらの線形結合で表現できる ⇒ 「基底」という

必要な基底ベクトルの数 = 空間(部分空間)の次元

基底は一意ではない。 v_1, v_2 の適当な線形結合を作ると、(線形従属でない限り)それらも基底

例)

$v'_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v'_2 = v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ も互いに線形独立であり、

$x + y + z = 0$ の部分空間を張る基底となっている

