クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数･解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治･松尾 泰･藤原 毅夫

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

第8講 線形空間

8-1 Cauchy-Schwarzの不等式

二次元ベクトルのプロット[MATLAB]

原点と (x, y) を結ぶ直線をプロットする（本来は先に矢印を描きたいが、簡単に書く方法がないので、原点とベクトルの先に○を描く）

```
v = [4;2] % 列ベクトルv
```

```
v = 2×1
     4
     2
```

```
w = [1;1] % 列ベクトルw
```

```
w = 2×1
     1
     1
```

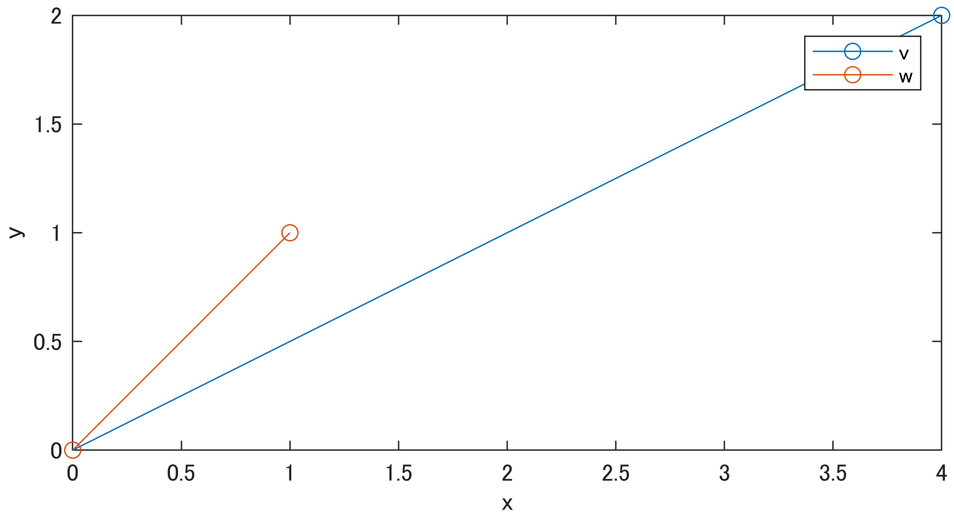
```
pv = [zeros(2,1), v] % 1列目に原点、2列目にvが入った2次元配列
```

```
pv = 2×2
     0     4
     0     2
```

```
pw = [zeros(2,1), w]
```

```
pw = 2×2
     0     1
     0     1
```

```
plot(pv(1,:),pv(2,:),'o-') % pvの1行目はx座標、2行目はy座標
hold on
plot(pw(1,:),pw(2,:),'o-')
hold off
xlabel('x'); ylabel('y')
legend('v','w')
daspect([1 1 1])
```



三次元ベクトルのプロット[MATLAB]

原点と (x, y, z) を結ぶ直線をプロットする

```
v = [4;2;1] % 列ベクトルv
w = [1;1;2] % 列ベクトルw
pv = [zeros(3,1), v]
pw = [zeros(3,1), w]
plot3(pv(1,:),pv(2,:),pv(3,:),'o-') % pvの1行目はx座標、2行目はy座標
hold on
plot3(pw(1,:),pw(2,:),pv(3,:),'o-')
hold off
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
legend('v','w')
daspect([1 1 1])
```

Cauchy-Schwarzの不等式

任意のベクトル v, w に対して

$$\|v\|^2\|w\|^2 \geq |(v, w)|^2$$

が成り立つ

例題）ベクトル $v=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ について、Cauchy-Schwarzの不等式の両辺を計算し、不等式が成り立っていることを確認せよ

［手計算］

$$\|v\|^2=$$

$$\|w\|^2=$$

$$|(v,w)|^2=$$

[MATLABでの計算］

例題）［手計算・MATLAB] ベクトル $v=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ について、同様の計算を行ってみよ

ベクトルのなす角度

$\|v\|,\|w\|\neq 0$ の実ベクトル v,w について、Cauchy-Schwarzの不等式より

$$-1\leq\frac{(v,w)}{\|v\|\|w\|}\leq 1$$

が成り立つ。よって

$\cos\theta=\frac{(v,w)}{\|v\|\|w\|}\ (0\leq\theta\leq\pi)$

となる θ が定義できる。この θ をベクトル v,w のなす「角度」と呼ぶ。とくに $(v,w)=0$ のとき $\theta=\pi/2$ (90度）であり，このとき「 v,w は直交する」という

例題）［手計算・MATLAB] ベクトル $v=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ の内積は 0 であることを確かめよ. MATLAB で $v,w $ を図示し，実際に直交している(90度の角度をなしている）ことを確認せよ

例題）［手計算］ベクトル $v=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ について、二つのベクトルのなす角度の $\cos\theta$ を求めよ

８−２ 三角不等式と余弦定理

三角不等式

実ベクトル v,w について、Cauchy-Schwarzの不等式より，
$\|v+w\|^2=((v+w),(v+w))=\|v\|^2+2(v,w)+\|w\|^2\leq\|v\|^2+2\|v\|\|w\|+\|w\|^2=(\|v\|+\|w\|)^2$

が成り立つ。すなわち

$\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$ (三角不等式)

（三角形のある辺の長さは、他の二辺の長さの和より小さい）

余弦定理

角度 θ をなす実ベクトル v, w について

$$\|v-w\|^2 = ((v-w),(v-w)) = \|v\|^2 - 2(v,w) + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\theta$$

すなわち

$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\theta$ (余弦定理)

が成り立つ。ここで $\|v-w\|$ はベクトル w の先から v の先へ向かうベクトルの長さである。特に v と w が直交するときは、 $\cos\theta = 0$ から

$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (ピタゴラスの定理)

が成り立つ

例題)［手計算・MATLAB] ベクトル $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ について、三角不等式と余弦定理がなりたっていることを確認せよ

例題)［手計算］ $\|v\| = 5$, $\|w\| = 3$ であるとする. $\|v-w\|$ の最小値と最大値を求めよ. (v,w) の最小値と最大値を求めよ