クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

実数 x, y, z に対して

方程式 $x+y+z=0$ を要求する

① 解の集合は線形空間となることを示せ

② 基底の例を一つ構成せよ

答の例　$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; x+y+z=0 \right\}$ とする

① $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$　$v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ が V の元として

$x_1 + y_1 + z_1 = 0,\quad x_2 + y_2 + z_2 = 0$

このとき　kv_1 = 解

$\Longleftrightarrow \quad kx_1 + ky_1 + kz_1 = k(x_1 + y_1 + z_1) = 0$

$v_1 + v_2$ も解

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0$

② 二つの解として　$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ をとると

v_1, v_2 は一次独立? $xv_1 + yv_2 = \begin{bmatrix} x \\ -x+y \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \quad x = y = 0$

V は 2 次元空間なので　v_1, v_2 は基底となる。