クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:
利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。

行列

直交行列, ユニタリー行列

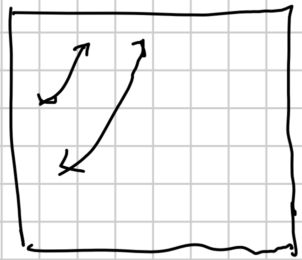
直交行列

$A = [a(i,j)]$ $\quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$

$n \times n$ 実行列

$a(i,j)$ 実数

条件 $\quad {}^tA$: 転置行列



$${}^tA \cdot A = E$$

$$A \cdot {}^tA = E$$

同値な条件

$$\sum_{k=1}^{n} a(k,i)\,a(k,j) = \delta_{ij}$$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} a(i,k)\,a(j,k) = \delta_{ij}$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

ユニタリー行列　A : $n \times n$ 複素行列

A^* : 随伴行列

$$A = [a(i,j)]_{i,j} \rightarrow \boxed{A^* = [a(i,j)^*]_{j,i}}$$

条件 : $A^* \cdot A = A \cdot A^* = E$

成分表示

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a(k,i)^* a(k,j) = \delta_{ij} \\ \sum_{k=1}^{n} a(i,k)^* a(j,k) = \delta_{ij} \end{cases}$$

エルミート行列

$$A = A^*$$

Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

▷ 対角行列　　A : $n \times n$ 行列　　$A = [a(i,j)]_{i,j}$

対角行列　$a(i,j) = 0$ （$i \neq j$ の場合）

$$A = \begin{pmatrix} a(1,1) & & & \text{\Large 0} \\ & a(2,2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a(n,n) \end{pmatrix}$$

▷ 上三角行列　　（下三角行列）

上三角

一般には
ゼロでない

$i > j$ の場合
$a(i,j) = 0$

$$\begin{pmatrix} a(1,1) & & \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & a(n,n) \end{pmatrix}$$

下三角

$i < j$ の場合

$a(i,j) = 0$

$$\begin{pmatrix} a(1,1) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ & & a(n,n) \end{pmatrix}$$

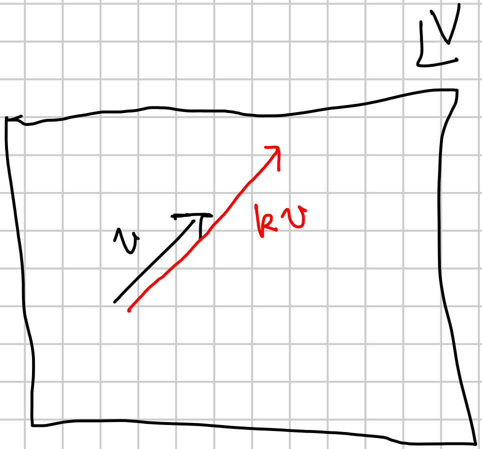
一般には
ゼロで
ない

 CC BY-NC-ND

線形空間・線形写像

線形空間とは？

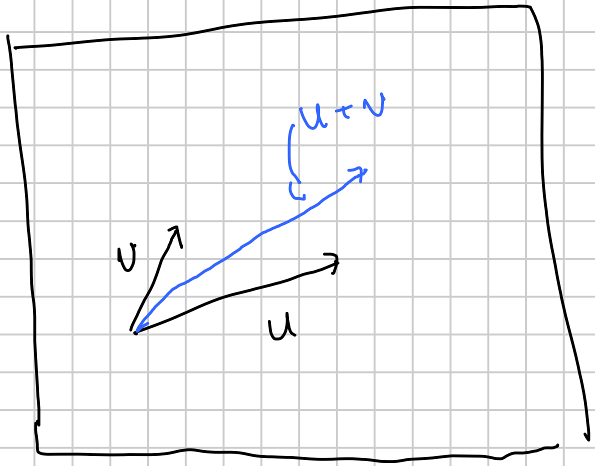
V: 集合



① $v \in V \Rightarrow k \cdot v \in V$

kは実数 または 複素数

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$



② $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$

①②をまとめると $u, v \in V$, a, b: $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$

$$au + bv \in V$$

Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

例) ベクトル空間 $x_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

V: $n \times 1$ 列ベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$1 \times n$ $[x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 行ベクトル

線形空間

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in V, \quad au + bv = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix} \in V$$

同様にして $n \times m$ 行列全体の集合も線形空間

他の例　一次関数全体の空間 V　$f(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = f_0 + f_1 x$,　$g(x) = g_0 + g_1 x$　　$f_0, f_1, g_0, g_1 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{a f(x) + b g(x)}_{\text{線形和}} = \underbrace{(a f_0 + b g_0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a f_1 + b g_1)}_{\in \mathbb{R}} x \in V$$

同様にして n 次関数全体も線形空間になる

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I　2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

 CC BY-NC-ND

一次従属，一次独立

▷ V に属する k コの元 $v_1, \cdots, v_k \in V$ が 一次独立

$\Longleftrightarrow$ $a_i \in \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$

$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる

▷ V に属する k コの元 $v_1, \cdots, v_k \in V$ が 一次従属

$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ がゼロでない $a_1 \cdots, a_n$ に対して成立する.

例) $V = \mathbb{R}^2$ とすると

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ u, v は 一次独立

$\because$ $au + bv = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b=0 \\ a-b=0 \end{matrix}\right\} \to a = b = 0$

基底

V：線形空間　Vに含まれる一次独立な元

$v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}$

任意のVの元vは

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

と書ける.

$v_1, \cdots, v_n$：Vの基底

Vの次元はn.

例) $\mathbb{R}^n$　$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$　$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$　$\cdots$　$v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_1, \cdots, v_n$は$\mathbb{R}^n$の基底.

CC BY-NC-ND

 CC BY-NC-ND

▷ 線形空間の内積

$$x, y \in V \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

内積の定義

▷
$$\left.\begin{aligned} (ax, y) &= a^* (x, y) \\ (x, ay) &= a (x, y) \\ (x_1 + x_2, y) &= (x_1, y) + (x_2, y) \\ (x, y_1 + y_2) &= (x, y_1) + (x, y_2) \end{aligned}\right\} \text{線形性}$$

▷ 正値性 $x \in V$

$$(x, x) = \|x\|^2 \geq 0 \quad \Big\} \text{正値性}$$

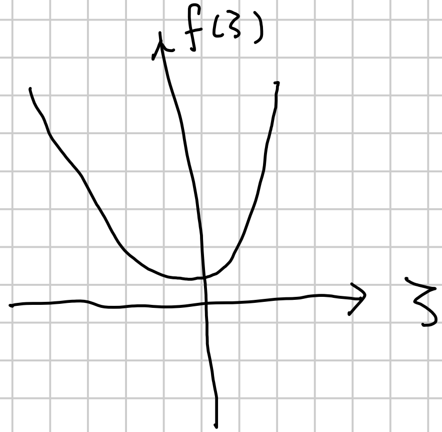
内積の例 $V = \mathbb{C}^n$ として $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

$$(v, u) = v_1^* u_1 + \cdots + v_n^* u_n = \sum_{k=1}^{n} (v_k)^* u_k$$

$$(u, u) = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 \geq 0$$

Cauchy-Schwarz の不等式

x, y は実ベクトル



$$\|x\|^2 \|y\|^2 \geq |(x, y)|^2$$

∵ $f(\xi) = \|x - \xi y\|^2$

内積の正値性 $f(\xi) \geq 0$

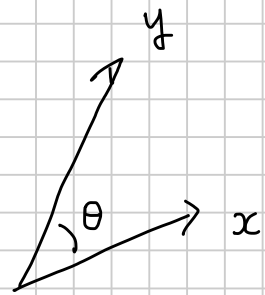
$$f(\xi) = (x - \xi y, x - \xi y) = (x, x) - \xi\underbrace{\left((x, y) + (y, x)\right)}_{=2(x, y)} + \xi^2 (y, y)$$

↑線形性

$f(\xi) \geq 0$ の判別式 $D \leq 0$

$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$$

$$\|x\|^2 \|y\|^2 \geq (x, y)^2$$



$V = \mathbb{R}^n$ の場合 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad \frac{(x, y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \cos\theta$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

▷ 正規直交基底

$e_1, \cdots, e_n$: V の基底

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

任意の V の元 v は線形和で書ける

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$$

$$v_i = (e_i, v)$$

$\because$ $(e_i, v) = (e_i, v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n)$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j (e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \delta_{ij} = v_i \;/\!/$$

 CC BY-NC-ND

$\mathbb{R}^n$ の場合 正規直交基底

標準的な例 $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

一般の正規直交基底 $e_i = \begin{bmatrix} e(i,1) \\ e(i,2) \\ \vdots \\ e(i,n) \end{bmatrix}$ $e(i,j) \in \mathbb{R}$

e_i が正規直交基底

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} e(i,k)\, e(j,k)$$

直交行列の式と一致

$A = [e(i,j)]_{i,j}$

A は直交行列

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

線形代数では基底を上手に選ぶことにより問題を簡単化できる

直交行列，ユニタリー行列をうまく使う

Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND