クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

第6講 行列の演算

6-7 行列関数

行列の関数 関数 $f(x)$ の引数 x が行列の場合を考える

正方行列に対して $f(A)$ が定義される

多項式の場合 x^2, x^3 等を $A \times A$, $A \times A \times A$ に置き換えれば良い

関数の値は A と同じサイズの行列

例: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(A) = AA = A^2$

例題:

```
syms x
f(x) = 1 + 3*x + x^2
```

f(x) = $1 + 3\,x + x^2$

```
A = [1  -1; 2 2]
```

```
A = 2×2
     1    -1
     2     2
```

について $f(A)$ を求めよ 行列の指数関数・対数関数・ベキ関数 テイラー展開で定義する

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$$

例題:

```
A = [ 0 1; 0 0 ]
```

```
A = 2×2
     0     1
     0     0
```

のとき、 A^2 、 A^3 、 $\exp A$ を求めよ

(一般の行列の指数関数の求め方については、行列の対角化のところで) 行列の方程式 通常の数について成り立つ式は、その導出に交換則や逆の存在を仮定していなければ、数を行列に置き換えても成り立つ

例:

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ はAとBが非可換な場合は成り立たない

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ は任意の次数の等しい正方行列 A , B について成り立つ

例: $AB = 0$ ならば $A = 0$ あるいは $B = 0$

A と B のどちらかが正則である場合は成り立つ

正則でない場合、どちらも零行列でなくても $AB=0$ となりうる

例: 通常の数の場合、方程式 $f(x)=x^2-1=0$ は $x^2-1=(x+1)(x-1)=0$ から解 $x=1,-1$ のみを持つ。 x が行列 A の場合、 $A=E,-E$ は $f(A)=0$ の解であるが、それ以外にも解は存在する。例えば

```
A = [ 0 1; 1 0]
```

```
A = 2×2
     0     1
     1     0
```

このとき $A+E$, $A-E$ は正則でないことに注意

6-8 ケーリー・ハミルトンの定理

正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)=\det(xE-A)$ に対して、 $\Phi_A(A)=O$ が成り立つ

2次の正方行列の場合

```
syms a b c d
A = [a b; c d]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと $\Phi_A(x)=\det(xE-A)=(x-a)(x-d)-bc=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$

例題: $\Phi_A(A)=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ が成り立つことを示せ

例題:

```
A = [2 0; 1 3]
```

```
A = 2×2
     2     0
     1     3
```

について、 $A^2-5A+6E=0$ が成り立つことを確かめよ