

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析 I
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



第6講 行列の演算

6-7 行列関数

行列の関数 関数 $f(x)$ の引数 x が行列の場合を考える

正方行列に対して $f(A)$ が定義される

多項式の場合 x^2, x^3 等を $A \times A, A \times A \times A$ に置き換えれば良い

関数の値は A と同じサイズの行列

例: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(A) = AA = A^2$

例題:

```
syms x
f(x) = 1 + 3*x + x^2
```

```
f(x) = 1 + 3*x + x^2
```

```
A = [1 -1; 2 2]
```

```
A = 2x2
     1  -1
     2   2
```

について $f(A)$ を求めよ 行列の指数関数・対数関数・ベキ関数 テイラー展開で定義する

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$$

例題:

```
A = [ 0 1; 0 0 ]
```

```
A = 2x2
     0  1
     0  0
```

のとき、 A^2 、 A^3 、 $\exp A$ を求めよ

(一般の行列の指数関数の求め方については、行列の対角化のところ) 行列の方程式 通常の数について成り立つ式は、その導出に交換則や逆の存在を仮定していなければ、数を行列に置き換えても成り立つ

例:

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ は A と B が非可換な場合は成り立たない

$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ は任意の次数の等しい正方行列 A, B について成り立つ

例: $AB = 0$ ならば $A = 0$ あるいは $B = 0$

A と B のどちらかが正則である場合は成り立つ

正則でない場合、どちらも零行列でなくても $AB = 0$ となりうる

例: 通常の数の場合、方程式 $f(x) = x^2 - 1 = 0$ は $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = 0$ から解 $x = 1, -1$ のみを持つ。 x が行列 A の場合、 $A = E, -E$ は $f(A) = 0$ の解であるが、それ以外にも解は存在する。例えば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

このとき $A + E, A - E$ は正則でないことに注意

6-8 ケーリー・ハミルトンの定理

正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ に対して、 $\Phi_A(A) = O$ が成り立つ

2次の正方行列の場合

$$\text{syms } a \ b \ c \ d \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと $\Phi_A(x) = \det(xE - A) = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$

例題: $\Phi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ が成り立つことを示せ

例題:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

について、 $A^2 - 5A + 6E = 0$ が成り立つことを確かめよ