クレジット：
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅰ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス：
利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

第6講 行列の演算

6-4 行列の演算

行列の和 結合則・交換則が成り立つ

```
A = rand(2)
```

```
A = 2×2
    0.9884    0.7069
    0.5400    0.9995
```

```
B = rand(2)
```

```
B = 2×2
    0.2878    0.4648
    0.4145    0.7640
```

```
C = rand(2)
```

```
C = 2×2
    0.8182    0.1781
    0.1002    0.3596
```

```
(A + B) + C
```

```
ans = 2×2
    2.0945    1.3499
    1.0547    2.1231
```

```
A + (B + C)
```

```
ans = 2×2
    2.0945    1.3499
    1.0547    2.1231
```

```
A + B
```

```
ans = 2×2
    1.2763    1.1718
    0.9545    1.7634
```

```
B + A
```

```
ans = 2×2
    1.2763    1.1718
    0.9545    1.7634
```

```
% 行列の積
% 積 $AB$ は $A$ の列の数と $B$ の行が等しい場合しか定義されない

A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.0567    0.3358    0.2089
    0.5219    0.1757    0.9052
```

```
B = rand(3,4)
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

```
B = 3×4
    0.6754    0.1040    0.5619    0.2999
    0.4685    0.7455    0.1842    0.1341
    0.9121    0.7363    0.5972    0.2126
```

```
A * B % OK
```

```
ans = 2×4
    0.3862    0.4101    0.2185    0.1065
    1.2604    0.8517    0.8662    0.3725
```

次の式はエラーになる

```
% B * A % NG
```

積の結合則は成り立つが交換則は必ずしも成り立たない

```
A = rand(2)
```

```
A = 2×2
    0.8949    0.2425
    0.0715    0.0538
```

```
B = rand(2)
```

```
B = 2×2
    0.4417    0.8972
    0.0133    0.1967
```

```
C = rand(2)
```

```
C = 2×2
    0.0934    0.4561
    0.3074    0.1017
```

```
(A * B) * C
```

```
ans = 2×2
    0.2987    0.2682
    0.0260    0.0223
```

```
A * (B *  C)
```

```
ans = 2×2
    0.2987    0.2682
    0.0260    0.0223
```

```
A * B
```

```
ans = 2×2
    0.3985    0.8506
    0.0323    0.0747
```

```
B * A
```

```
ans = 2×2
    0.4594    0.1553
    0.0259    0.0138
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫**　CC BY-NC-ND

交換則が成り立つ場合、「AとBは可換」、成り立たない場合は「AとBは非可換」という

特に同じサイズの正方行列の積や、行列と列ベクトルの積がよく出てくる

行列と列ベクトルの積は列ベクトルになる

```
x = [3; 1]
```

```
x = 2×1
     3
     1
```

```
A = [1 2; 5 6]
```

```
A = 2×2
     1     2
     5     6
```

```
A * x
```

```
ans = 2×1
     5
    21
```

行ベクトルと行列の積は行ベクトルになる

```
x = [3 1]
```

```
x = 1×2
     3     1
```

```
A = [1 2; 5 6]
```

```
A = 2×2
     1     2
     5     6
```

```
x * A
```

```
ans = 1×2
     8    12
```

行列の積の転置は転置の積で与えられる

```
A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.9954    0.2973    0.2982
    0.3321    0.0620    0.0464
```

```
B = rand(3,4)
```

```
B = 3×4
    0.5054    0.0899    0.9051    0.8258
    0.7614    0.0809    0.5338    0.3381
    0.6311    0.7772    0.1092    0.2940
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

```
(A * B)'
```

```
ans = 4×2
    0.9177    0.2443
    0.3453    0.0709
    1.0922    0.3388
    1.0102    0.3088
```

```
B' * A'
```

```
ans = 4×2
    0.9177    0.2443
    0.3453    0.0709
    1.0922    0.3388
    1.0102    0.3088
```

```
% ベクトルの積
% ベクトルの内積
%
% 長さ $n$ の列ベクトルと列ベクトルの内積（実数ベクトルの場合）
%
% $$v \cdot w = {}^tv w = v(1)w(1) + v(2)w(2) + \cdots v(n)w(n)$$

v = [1.0; 2.0; 1.5]
```

```
v = 3×1
    1.0000
    2.0000
    1.5000
```

```
w = [0.5; 1.5; 1.0]
```

```
w = 3×1
    0.5000
    1.5000
    1.0000
```

```
dot(v,w)
```

```
ans = 5
```

```
v' * w
```

```
ans = 5
```

複素数の場合

$$v \cdot w = v^* w = \overline{v}(1)w(1) + \overline{v}(2)w(2) + \cdots \overline{v}(n)w(n)$$

```
v = rand(3,1) + 1i * rand(3,1)
```

```
v = 3×1 complex
   0.7463 + 0.6679i
   0.0103 + 0.6035i
   0.0484 + 0.5261i
```

```
w = rand(3,1) + 1i * rand(3,1)
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

```
w = 3×1 complex
   0.7297 + 0.2880i
   0.7073 + 0.6925i
   0.7814 + 0.5567i
```

```
dot(v,w)
```

```
ans = 1.4929 - 1.0762i
```

```
v' * w
```

```
ans = 1.4929 - 1.0762i
```

結果はスカラー

ベクトルの直積

長さ n の列ベクトルと列ベクトルの直積（実数ベクトルの場合）

$$v \otimes w = v^t w$$

```
v = [1.0; 2.0; 1.5]
```

```
v = 3×1
    1.0000
    2.0000
    1.5000
```

```
w = [0.5; 1.5; 1.0]
```

```
w = 3×1
    0.5000
    1.5000
    1.0000
```

```
v * w'
```

```
ans = 3×3
    0.5000    1.5000    1.0000
    1.0000    3.0000    2.0000
    0.7500    2.2500    1.5000
```

結果は $n \times n$ 行列 行列のフロベニウス積（フロベニウス内積）同じサイズ($m \times n$)の行列の間で定義される

結果は($m \times n$)の行列

(i, j) 成分は (i, j) 成分と (i, j) 成分の積

```
A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.3965    0.7802    0.6079
    0.0616    0.3376    0.7413
```

```
B = rand(2,3)
```

```
B = 2×3
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

```
    0.1048    0.5495    0.8905
    0.1279    0.4852    0.7990
```

```
A .* B
```

```
ans = 2×3
    0.0416    0.4287    0.5413
    0.0079    0.1638    0.5922
```

```
% クロネッカー積（クロネッカーテンソル積、直積）
% $m \times n$ 行列と $p \times q$ 行列のクロネッカー積
%
% 結果は $(mp) \times (nq)$行列

A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.7343    0.0729    0.7984
    0.0513    0.0885    0.9430
```

```
B = rand(3,4)
```

```
B = 3×4
    0.6837    0.1104    0.3288    0.5832
    0.1321    0.1175    0.6538    0.7400
    0.7227    0.6407    0.7491    0.2348
```

```
kron(A,B)
```

```
ans = 6×12
    0.5021    0.0810    0.2415    0.4283    0.0498    0.0080    0.0240    0.0425 ···
    0.0970    0.0863    0.4801    0.5434    0.0096    0.0086    0.0477    0.0539
    0.5307    0.4705    0.5501    0.1724    0.0527    0.0467    0.0546    0.0171
    0.0351    0.0057    0.0169    0.0299    0.0605    0.0098    0.0291    0.0516
    0.0068    0.0060    0.0336    0.0380    0.0117    0.0104    0.0579    0.0655
    0.0371    0.0329    0.0385    0.0121    0.0640    0.0567    0.0663    0.0208
```

```

A = eye(2)
```

```
A = 2×2
     1     0
     0     1
```

```
B = rand(2)
```

```
B = 2×2
    0.7350    0.8669
    0.9706    0.0862
```

```
kron(A,B)
```

```
ans = 4×4
    0.7350    0.8669         0         0
    0.9706    0.0862         0         0
         0         0    0.7350    0.8669
         0         0    0.9706    0.0862
```

6-5 行列のノルム

ベクトルのノルム ベクトルの「長さ」

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^* v} = \sqrt{|v(1)|^2 + |v(2)|^2 + \cdots + |v(n)|^2}$$

```
v = [1 -2 3]
```

```
v = 1×3
     1    -2     3
```

```
n = norm(v)
```

```
n = 3.7417
```

```
z = [0 0 0]
```

```
z = 1×3
     0     0     0
```

```
norm(z)
```

```
ans = 0
```

ノルムが0となるのはゼロベクトルのみ 行列のノルム 行列のノルムにはいろいろな種類がある

そのうちの一つ、フロベニウスノルム

$$|A|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A(i,j)|^2} = \sqrt{tr(A^* A)}$$

```
A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.3664    0.6850    0.7894
    0.3692    0.5979    0.3677
```

```
norm(A,'fro')
```

```
ans = 1.3622
```

```
sqrt(trace(A'*A))
```

```
ans = 1.3622
```

```
Z = zeros(3)
```

```
Z = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
norm(Z,'fro')
```

```
ans = 0
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

行列のノルムが0となるのはゼロ行列のみ

6-6 逆行列

行列式が 0 でない場合は逆行列 A^{-1} が存在して $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

```
A = rand(2)
```

```
A = 2×2
    0.2060    0.7719
    0.0867    0.2057
```

```
inv(A)
```

```
ans = 2×2
   -8.3859   31.4739
    3.5336   -8.4003
```

```
inv(A) * A
```

```
ans = 2×2
    1.0000    0.0000
         0    1.0000
```

```
A * inv(A)
```

```
ans = 2×2
    1.0000   -0.0000
    0.0000    1.0000
```

逆行列が存在するとき、その行列は「正則」であるという

逆行列が存在するための必要十分条件は、行列式が非ゼロであること

例題:(積が定義されている)任意の行列の積の転置は転置の積で与えられることを証明せよ

例題: 3つの行列の積の転置を求めよ

任意の $m \times n$ の実行列 A について ${}^tAA$ と $A{}^tA$ は必ず対称行列である

例:

```
A = rand(2,3)
```

```
A = 2×3
    0.3883    0.2290    0.4845
    0.5518    0.6419    0.1518
```

```
A' * A
```

```
ans = 3×3
    0.4552    0.4431    0.2719
    0.4431    0.4645    0.2084
    0.2719    0.2084    0.2578
```

```
A * A'
```

```
ans = 2×2
```


Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND

```
0.4379    0.4348
0.4348    0.7396
```

例題: 任意の $m \times n$ の実行列 A について ${}^tAA$ が対称行列となることを証明せよ

まとめ: 行列と数の性質の違い

行列は通常の数と同様な法則が多く成り立ち「一般化された数」と言える。しかしながら以下の点について通常の数とは異なることに注意が必要である

- AB が定義されていても BA が定義されない場合がある
- A と B がともに正方行列の場合には AB と BA が定義されるが、一般的には積の交換則 $AB = BA$ が成り立つ(=可換) とは限らない
- 零行列でない2つの行列の積が零行列になることがある
- A が零行列であっても $AB = E$ となる行列 B (= 逆行列 A^{-1})が存在するとは限らない

Mathematics and Informatics Center **文科系のための線形代数・解析 I** 2020 **藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫** CC BY-NC-ND