第6講 行列の演算

6-1 行列の記法

行ベクトル・列ベクトル・行列

各要素はコンマ(',')またはスペース(空白)で区切る

セミコロン(';')で区切ると次の行に移る

ベクトルは行列の特別な例

行ベクトル(1×3 行列)、列ベクトル(3×1 行列)、 2×4 行列の例

```
a = [1 0.5 2]
```

```
a = 1×3
    1.0000    0.5000    2.0000
```

```
b = [3; 0; 1.3]
```

```
b = 3×1
    3.0000
         0
    1.3000
```

```
A = [1 2 3 4; 5 6 7 8]
```

```
A = 2×4
     1     2     3     4
     5     6     7     8
```

クロネッカーのデルタ関数

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

MATLABでは eq 関数か == を使う

```
i = 1; j = 2;
eq(i,j)
```

```
ans = logical
   0
```

```
i == j
```

```
ans = logical
   0
```

```
i = 1; j = 1;
eq(i,j)
```

```
ans = logical
   1
```

```
i == j
```

```
ans = logical
   1
```

クロネッカーのデルタ関数を使うと単位行列の成分は $E(i,j)=\delta_{i,j}$ と表すことができる

行列の要素

例 $A(2,3)$

```
A(2,3)
```

```
ans = 7
```

(2,3)成分の値を1にセットする

```
A(2,3) = 1;
A
```

```
A = 2×4
     1     2     3     4
     5     6     1     8
```

行列のスライス

列の抜き出し: 例 Aの2列目を抜き出す(結果は列ベクトル)

```
A(:,2)
```

```
ans = 2×1
     2
     6
```

行の抜き出し: 例 Aの1行目を抜き出す(結果は行ベクトル)

```
A(1,:)
```

```
ans = 1×4
     1     2     3     4
```

行列の転置

行ベクトルは列ベクトルに、列ベクトルは行ベクトルに

```
a'
```

```
ans = 3×1
    1.0000
    0.5000
    2.0000
```

```
b'
```

```
ans = 1×3
    3.0000         0    1.3000
```

$m \times n$ 行列は $n \times m$ 行列に

```
A'
```

```
ans = 4×2
     1     5
     2     6
     3     1
     4     8
```

.' と書いても同じ

```
a.'
```

```
ans = 3×1
    1.0000
    0.5000
    2.0000
```

```
b.'
```

```
ans = 1×3
    3.0000         0    1.3000
```

```
A.'
```

```
ans = 4×2
     1     5
     2     6
     3     1
     4     8
```

複素行列の場合は ' と .' は意味が異なる

```
C = [1+3i 2+1i; 1-2i 3i]
```

```
C = 2×2 complex
   1.0000 + 3.0000i   2.0000 + 1.0000i
   1.0000 - 2.0000i   0.0000 + 3.0000i
```

```
C'  % 複素転置(複素共役を取って転置)
```

```
ans = 2×2 complex
   1.0000 - 3.0000i   1.0000 + 2.0000i
   2.0000 - 1.0000i   0.0000 - 3.0000i
```

```
C.' % 転置 (!= C')
```

```
ans = 2×2 complex
   1.0000 + 3.0000i   1.0000 - 2.0000i
   2.0000 + 1.0000i   0.0000 + 3.0000i
```

```
conj(C).' % == C'
```

```
ans = 2×2 complex
   1.0000 - 3.0000i   1.0000 + 2.0000i
   2.0000 - 1.0000i   0.0000 - 3.0000i
```


行列の対角成分

```
A = [1 2 3; 2 3 4; 3 4 5]
```

```
A = 3×3
     1     2     3
     2     3     4
     3     4     5
```

```
diag(A)
```

```
ans = 3×1
     1
     3
     5
```

6-2 さまざまな行列の生成

単位行列

3×3 単位行列

```
E = eye(3)
```

```
E = 3×3
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

ゼロ行列

4×4 ゼロ行列

```
Z = zeros(4)
```

```
Z = 4×4
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

対角行列

対角成分が [1 3 2 4] であるような 4×4 対角行列の生成

```
v = [1 3 2 4] % 任意次元の列または行ベクトルが渡せます
```

```
v = 1×4
     1     3     2     4
```

```
D = diag(v)
```

```
D = 4×4
     1     0     0     0
     0     3     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     4
```

```
v = rand(10,1) % 列ベクトル
```

```
v = 10×1
    0.4283
    0.4820
    0.1206
    0.5895
    0.2262
    0.3846
    0.5830
    0.2518
    0.2904
    0.6171
```

```
D = diag(v)
```

```
D = 10×10
    0.4283         0         0         0         0         0         0         0 ···
         0    0.4820         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.1206         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.5895         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.2262         0         0         0
         0         0         0         0         0    0.3846         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.5830         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.2518
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

```
v = rand(1,10) % 行ベクトル
```

```
v = 1×10
    0.2653    0.8244    0.9827    0.7302    0.3439    0.5841    0.1078    0.9063 ···
```

```
D = diag(v)
```

```
D = 10×10
    0.2653         0         0         0         0         0         0         0 ···
         0    0.8244         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.9827         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.7302         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.3439         0         0         0
         0         0         0         0         0    0.5841         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.1078         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.9063
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

行列に対して diag を2回使うと、対角成分以外が 0 になった対角行列が生成される

```
A = [1 2 3; 2 3 4; 3 4 5]
```

```
A = 3×3
     1     2     3
     2     3     4
     3     4     5
```

```
D = diag(A)
```

```
D = 3×1
     1
```

```
     3
     5
```

```
B = diag(diag(A))
```

```
B = 3×3
     1     0     0
     0     3     0
     0     0     5
```

ランダム行列

4×4 ランダム行列（等式をテストしてみるのに便利）

```
R = rand(4)
```

```
R = 4×4
    0.2607    0.3127    0.0942    0.6999
    0.5944    0.1615    0.5985    0.6385
    0.0225    0.1788    0.4709    0.0336
    0.4253    0.4229    0.6959    0.0688
```

繰り返すたびに異なる行列が生成される

```
for n = 1:4
    rand(4)
end
```

```
ans = 4×4
    0.3196    0.8200    0.3251    0.4235
    0.5309    0.7184    0.1056    0.0908
    0.6544    0.9686    0.6110    0.2665
    0.4076    0.5313    0.7788    0.1537
ans = 4×4
    0.2810    0.8754    0.9577    0.6718
    0.4401    0.5181    0.2407    0.6951
    0.5271    0.9436    0.6761    0.0680
    0.4574    0.6377    0.2891    0.2548
ans = 4×4
    0.2240    0.7805    0.3868    0.4243
    0.6678    0.6753    0.9160    0.4609
    0.8444    0.0067    0.0012    0.7702
    0.3445    0.6022    0.4624    0.3225
ans = 4×4
    0.7847    0.7218    0.6074    0.9174
    0.4714    0.4735    0.1917    0.2691
    0.0358    0.1527    0.7384    0.7655
    0.1759    0.3411    0.2428    0.1887
```

ランダム複素行列の生成例

```
R = rand(4) + 1i * rand(4)
```

```
R = 4×4 complex
   0.2875 + 0.4501i   0.5466 + 0.3502i   0.6790 + 0.8329i   0.7093 + 0.5407i
   0.0911 + 0.4587i   0.4257 + 0.6620i   0.6358 + 0.2564i   0.2362 + 0.8699i
   0.5762 + 0.6619i   0.6444 + 0.4162i   0.9452 + 0.6135i   0.1194 + 0.2648i
   0.6834 + 0.7703i   0.6476 + 0.8419i   0.2089 + 0.5822i   0.6073 + 0.3181i
```

対称行列(${}^tA = A$)の生成例

```
R = rand(4)
```

```
R = 4×4
    0.1192    0.6393    0.7210    0.1058
    0.9398    0.5447    0.5225    0.1097
    0.6456    0.6473    0.9937    0.0636
    0.4795    0.5439    0.2187    0.4046
```

```
A = (R + R') % A == A.' == A'
```

```
A = 4×4
    0.2384    1.5791    1.3666    0.5853
    1.5791    1.0894    1.1698    0.6536
    1.3666    1.1698    1.9874    0.2823
    0.5853    0.6536    0.2823    0.8092
```

自己随伴行列(エルミート行列) $(A^* = A)$の生成例

```
R = rand(4) + 1i * rand(4)
```

```
R = 4×4 complex
   0.4484 + 0.6714i   0.7720 + 0.1500i   0.1389 + 0.7549i   0.5303 + 0.3592i
   0.3658 + 0.7413i   0.9329 + 0.5861i   0.6963 + 0.2428i   0.8611 + 0.7363i
   0.7635 + 0.5201i   0.9727 + 0.2621i   0.0938 + 0.4424i   0.4849 + 0.3947i
   0.6279 + 0.3477i   0.1920 + 0.0445i   0.5254 + 0.6878i   0.3935 + 0.6834i
```

```
A = (R + R') % A == A' != A.'
```

```
A = 4×4 complex
   0.8967 + 0.0000i   1.1378 - 0.5913i   0.9024 + 0.2349i   1.1582 + 0.0115i
   1.1378 + 0.5913i   1.8657 + 0.0000i   1.6690 - 0.0194i   1.0532 + 0.6919i
   0.9024 - 0.2349i   1.6690 + 0.0194i   0.1876 + 0.0000i   1.0103 - 0.2931i
   1.1582 - 0.0115i   1.0532 - 0.6919i   1.0103 + 0.2931i   0.7869 + 0.0000i
```

複素対称行列$(\bar{A} = A)$の生成例

```
R = rand(4) + 1i * rand(4)
```

```
R = 4×4 complex
   0.7040 + 0.2160i   0.4243 + 0.6713i   0.4299 + 0.1673i   0.3968 + 0.8843i
   0.4423 + 0.7904i   0.2703 + 0.4386i   0.8878 + 0.8620i   0.8085 + 0.5880i
   0.0196 + 0.9493i   0.1971 + 0.8335i   0.3912 + 0.9899i   0.7551 + 0.1548i
   0.3309 + 0.3276i   0.8217 + 0.7689i   0.7691 + 0.5144i   0.3774 + 0.1999i
```

```
A = (R + R.') % A == A.' != A'
```

```
A = 4×4 complex
   1.4081 + 0.4320i   0.8666 + 1.4617i   0.4495 + 1.1166i   0.7276 + 1.2118i
   0.8666 + 1.4617i   0.5405 + 0.8773i   1.0848 + 1.6955i   1.6302 + 1.3569i
   0.4495 + 1.1166i   1.0848 + 1.6955i   0.7824 + 1.9797i   1.5242 + 0.6692i
   0.7276 + 1.2118i   1.6302 + 1.3569i   1.5242 + 0.6692i   0.7548 + 0.3997i
```

```
A.'
```

```
ans = 4×4 complex
   1.4081 + 0.4320i   0.8666 + 1.4617i   0.4495 + 1.1166i   0.7276 + 1.2118i
   0.8666 + 1.4617i   0.5405 + 0.8773i   1.0848 + 1.6955i   1.6302 + 1.3569i
   0.4495 + 1.1166i   1.0848 + 1.6955i   0.7824 + 1.9797i   1.5242 + 0.6692i
   0.7276 + 1.2118i   1.6302 + 1.3569i   1.5242 + 0.6692i   0.7548 + 0.3997i
```

```
A'
```

```
ans = 4×4 complex
   1.4081 - 0.4320i   0.8666 - 1.4617i   0.4495 - 1.1166i   0.7276 - 1.2118i
   0.8666 - 1.4617i   0.5405 - 0.8773i   1.0848 - 1.6955i   1.6302 - 1.3569i
   0.4495 - 1.1166i   1.0848 - 1.6955i   0.7824 - 1.9797i   1.5242 - 0.6692i
   0.7276 - 1.2118i   1.6302 - 1.3569i   1.5242 - 0.6692i   0.7548 - 0.3997i
```

直交行列($U{}^tU = {}^tUU = E$)の生成例 (v * v' と v' * v の違いに注意)

```
v = rand(4,1) % 列ベクトル
```

```
v = 4×1
    0.4070
    0.7487
    0.8256
    0.7900
```

```
U = eye(4) - 2 * v * v' / (v' * v) % v*v' はn*n行列、v' *vはスカラー
```

```
U = 4×4
    0.8370   -0.2999   -0.3307   -0.3164
   -0.2999    0.4482   -0.6084   -0.5822
   -0.3307   -0.6084    0.3291   -0.6420
   -0.3164   -0.5822   -0.6420    0.3857
```

```
U * U'  % == U * U.'
```

```
ans = 4×4
    1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000    1.0000
```

```
U' * U  % == U.' * U
```

```
ans = 4×4
    1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000    1.0000
```

ユニタリー行列($UU^* = U^*U = E$)の生成例

```
v = rand(4,1) + 1i * rand(4,1)
```

```
v = 4×1 complex
   0.3185 + 0.1363i
   0.5341 + 0.6787i
   0.0900 + 0.4952i
   0.1117 + 0.1897i
```

```
U = eye(4) - 2 * v * v' / (v' * v)
```

```
U = 4×4 complex
   0.7944 + 0.0000i  -0.4498 + 0.2456i  -0.1647 + 0.2492i  -0.1052 + 0.0774i
  -0.4498 - 0.2456i  -0.2775 - 0.0000i  -0.6579 + 0.3484i  -0.3227 + 0.0437i
  -0.1647 - 0.2492i  -0.6579 - 0.3484i   0.5661 + 0.0000i  -0.1781 - 0.0655i
  -0.1052 - 0.0774i  -0.3227 - 0.0437i  -0.1781 + 0.0655i   0.9170 - 0.0000i
```

```
U * U'  % != U * U.'
```

```
ans = 4×4 complex
   1.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i
```

```
U' * U  % != U.' * U
```

```
ans = 4×4
   1.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.000
   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.000
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.000
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.000
```

6-3 トレース・行列式

トレース(trace)

対角成分の和（対角和、固有和とも呼ぶ）

```
A =rand(3)
```

```
A = 3×3
    0.4950    0.8507    0.6967
    0.1476    0.5606    0.5828
    0.0550    0.9296    0.8154
```

```
trace(A)
```

```
ans = 1.8710
```

```
A(1,1)+A(2,2)+A(3,3)
```

```
ans = 1.8710
```

行列式(determinant)

2x2の場合は $ad-bc$ で与えられる

```
A = rand(2)
```

```
A = 2×2
    0.8790    0.0005
    0.9889    0.8654
```

```
det(A)
```

```
ans = 0.7602
```

```
A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)
```

```
ans = 0.7602
```

$n \times n$ 行列の行列式は $n!$ 項の和。書き下すのは大変だが、det 関数で簡単に求まる

```
A = rand(10)
```



```
A = 10×10
    0.6126    0.7386    0.7690    0.5523    0.1465    0.1239    0.9479    0.7378 ···
    0.9900    0.5860    0.5814    0.6299    0.1891    0.4904    0.0821    0.0634
    0.5277    0.2467    0.9283    0.0320    0.0427    0.8530    0.1057    0.8604
    0.4795    0.6664    0.5801    0.6147    0.6352    0.8739    0.1420    0.9344
    0.8013    0.0835    0.0170    0.3624    0.2819    0.2703    0.1665    0.9844
    0.2278    0.6260    0.1209    0.0495    0.5386    0.2085    0.6210    0.8589
    0.4981    0.6609    0.8627    0.4896    0.6952    0.5650    0.5737    0.7856
    0.9009    0.7298    0.4843    0.1925    0.4991    0.6403    0.0521    0.5134
    0.5747    0.8908    0.8449    0.1231    0.5358    0.4170    0.9312    0.1776
    0.8452    0.9823    0.2094    0.2055    0.4452    0.2060    0.7287    0.3986
```

```
det(A)
```

```
ans = 0.0172
```

一般の次元の行列について、行列式がゼロの場合は逆行列が存在しない。非ゼロの場合は逆行列が存在する