# 行列について

行列とは：数（実数・複素数）の集合を長方形の表の形にまとめたもの.

$$A = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\overbrace{\begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a(m,1) & a(m,2) & \cdots & a(m,n) \end{pmatrix}}^{n} = [a(i,j)]$$

$\underbrace{1 \le i \le m}_{\text{行}}$, $\underbrace{1 \le j \le n}_{\text{列}}$

$a(i,j)$ : 数　$1 \le i \le m$,　$1 \le j \le n$

行列の要素

matlab : $A = [a(1,1) \cdots a(1,n); a(2,1) \cdots a(2,n); \cdots$

$a(m,1) \cdots a(m,n)]$

$A$ : $m$ 行 $n$ 列の行列（$\underline{m \times n \text{ 行列}}$，$(m,n)$ 行列）

▷ ベクトル ： 列 または 行 が 1 の行列

行ベクトル $a = [\, a(1) \ \cdots \ a(n) \,]$ 1 × n 行列

列ベクトル $a = \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(n) \end{bmatrix}$ n × 1 行列

▷ $A = B$ （ AとBは n × m 行列 ）

$A = [\, a(i,j) \,]_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$

$B = [\, b(i,j) \,]$ 〃 〃

$A = B \iff a(i,j) = b(i,j)$ すべての i, j に対して

▷ 数と行列のかけ算　$A = [a(i,j)]$

$$xA = [x\, a(i,j)]$$

▷ 行列の和　$A = [a(i,j)]$ , $B = [b(i,j)]$

$$A + B = [a(i,j) + b(i,j)]$$

---

▷ 転置行列　タテとヨコの入れかえ　$A \xrightarrow{\text{matlab}} A.'$　← プライム　↑ ピリオド

$$A = [a(i,j)]_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \qquad n \times m \text{ 行列}$$

$$^tA = [a(i,j)]_{\underline{1 \le j \le m},\ \underline{1 \le i \le n}} \qquad m \times n \text{ 行列}$$

転置記号　入れかえ

$$A = \begin{pmatrix} a(1,1) & \cdots & a(1,m) \\ \vdots & & \vdots \\ a(n,1) & \cdots & a(n,m) \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a(1,1) & a(2,1) & \cdots & a(n,1) \\ a(1,2) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a(1,m) & \cdots & & a(n,m) \end{pmatrix}$$

▷ 複素共役行列

$$A = [\,a(i,j)\,] \longrightarrow \bar{A} = [\,a(i,j)^*\,]$$

複素共役

$$A \to \mathrm{conj}(A)$$

▷ 随伴行列 $A = [a(i,j)]_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} \longrightarrow A^* = [a(i,j)^*]_{1 \le j \le m,\ 1 \le i \le n}$

↑ matlab $(A \to A')$ 随伴

転置 + 複素共役を同時に行ったもの.

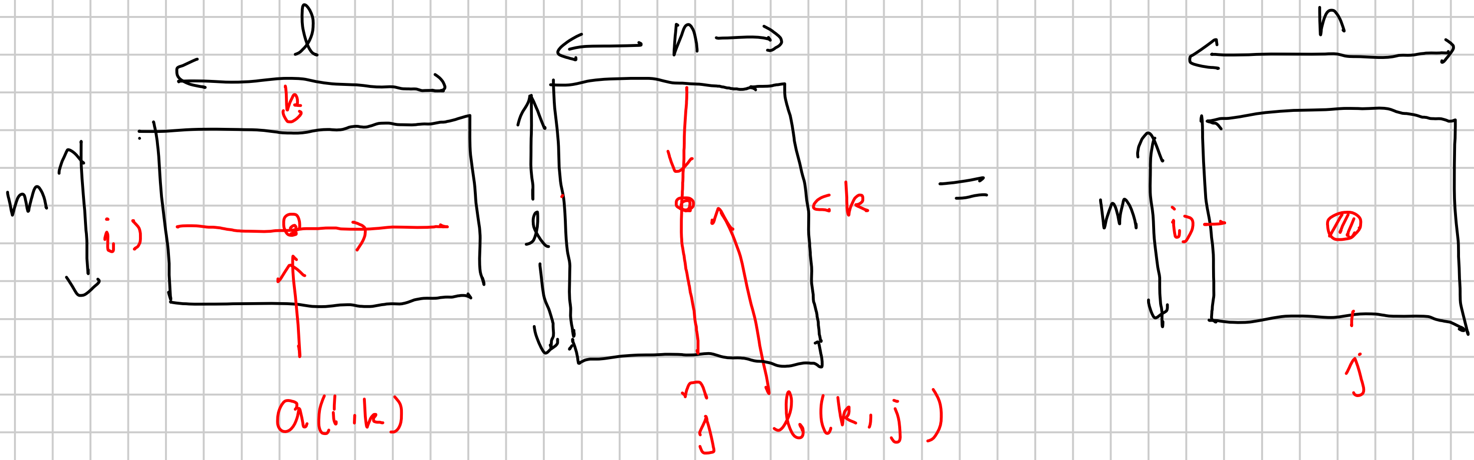
▷ 行列の積

A : $m \times l$ 行列　　$A = [a(i,j)]_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l}$

積を定義するためにはこれらが等しい必要がある

B : $l \times n$ 行列　　$B = [b(i,j)]_{1 \le i \le l,\ 1 \le j \le n}$

$$A \cdot B = \left[ \sum_{k=1}^{l} a(i,k)\, b(k,j) \right]_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$$




matlab では　A * B

行列とベクトルのかけ算…

ベクトルの内積

$X$ : ヨコベクトル $[x(1) \cdots x(n)]$ $1 \times n$

$Y$ : タテベクトル $\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}$ $n \times 1$

$X \cdot Y$ : $1 \times 1$ 行列 = 数

$$= \sum_{k=1}^{n} x(k)\, y(k)$$ ⇐ ベクトルの内積

(例) 行列の積の例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

正方行列 : タテとヨコのサイズが等しい行列

$n \times n$ 行列 = $n$ 次の正方行列

$A, B$ : $n$ 次の正方行列　　$A = [a(i,j)]$, $B = [b(i,j)]$

$\left\{ \begin{array}{ll} A \cdot B : & " \\ A + B & " \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ 正方行列は和と積について閉じている

<u>注意　$A \cdot B \neq B \cdot A$</u>　　積の非可換性

$$\underline{(AB)_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} a(i,k) b(k,j)$$

行列の$(i,j)$成分

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b(i,k) a(k,j)$$

等しくなる理由がない

(異なる和)

D 積の結合則

$A, B, C$ : $n$ 次正方行列　$A = [a(i,j)]$, $B = [b(i,j)]$

$C = [c(i,j)]$

$$(A \cdot B) C = A \cdot (B \cdot C) \quad : \text{結合則}$$

∵

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a(i,k)\, b(k,j)$$

$$((A \cdot B) \cdot C)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \Big( \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a(i,k)\, b(k,l)}_{(A\cdot B) \text{の } i,l \text{ 成分}} \Big) c(l,j)$$

$$\|$$

$$(A \cdot (B \cdot C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a(i,k) \Big( \sum_{l=1}^{n} b(k,l)\, c(l,j) \Big)$$

これら二つは和の順番の入れかえにより等しい

▷ 単位行列　$n \times n$ 正方行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

任意の正方行列 $A$ に対して

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

$E \Leftrightarrow$ "1" に相当する行列

matlab : eye(n)

▷ ゼロ行列　"オー"

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$a(i,j) = 0$

任意の正方行列 $A$ に対して　$A \cdot O = O \cdot A = O$

$O \longleftrightarrow$ "0" に相当する行列

matlab : zeros(n)

▷ 逆行列　　$A$: n次正方行列

$$X \cdot A = A \cdot X = E$$

↑単位行列

$X$ を逆行列と呼ぶ　$A \to \frac{1}{A}$

逆行列を $A^{-1}$ と書く　matlab　( inv(A) )

注意: 逆行列は一般のAに対して存在するとは限らない

例)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解が存在しない　(22成分は必ずゼロ)

Aの逆行列は存在しない

## 2行2列の場合の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{仮定 } ad-bc \neq 0}$

分数が定義できる

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & \cancel{-ab+ba} \\ \cancel{cd-dc} & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質 ： 逆行列は存在している場合には一意に定まる

$X, Y$ : $A$ の逆行列とする　　$XA = AX = YA = AY = E$

$XAY$ : $(XA)Y = E \cdot Y = Y$ , $X(AY) = X \cdot E = X$

$\Rightarrow$ 積の結合則により $X = Y$