第3講 指数関数/対数関数、一変数関数の微分、三次元プロット

3-4 関数の極限

変数 x がある値 a に近づくとき、それに伴って関数値 $f(x)$ がある値 ℓ に近づくとき「x が a に近づくときの関数 $f(x)$ の極限は ℓ である」という

あるいは、「関数 $f(x)$ は ℓ に収束する」、「$x \to a$ のとき $f(x) \to \ell$」、「$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$」などと書く

例1: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

例2 $\lim_{x \to -2} (3x^2 + x - 1)/(x+5)^2 = 1$

例3: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$

- 分子分母に $x = 1$ を代入すると $0/0$ となり値は不定になるように見える
- 少しづつ近づけてみる

```
f = @(x) (x.^2-1) ./ (x-1);
f(2)
```

```
ans = 3
```

```
f(1.1)
```

```
ans = 2.1000
```

```
f(1.01)
```

```
ans = 2.0100
```

```
f(1.001)
```

```
ans = 2.0010
```

```
f(1.0001)
```

```
ans = 2.0001
```

```
f(1.00001)
```

```
ans = 2.0000
```

2にどんどん近づく。1より少しだけ小さい側から近づいても同様に2に近づく

```
f(0)
```

```
ans = 1
```

```
f(0.9)
```

```
ans = 1.9000
```

```
f(0.99)
```

```
ans = 1.9900
```

```
f(0.999)
```

```
ans = 1.9990
```

```
f(0.9999)
```

```
ans = 1.9999
```

```
f(0.99999)
```

```
ans = 2.0000
```

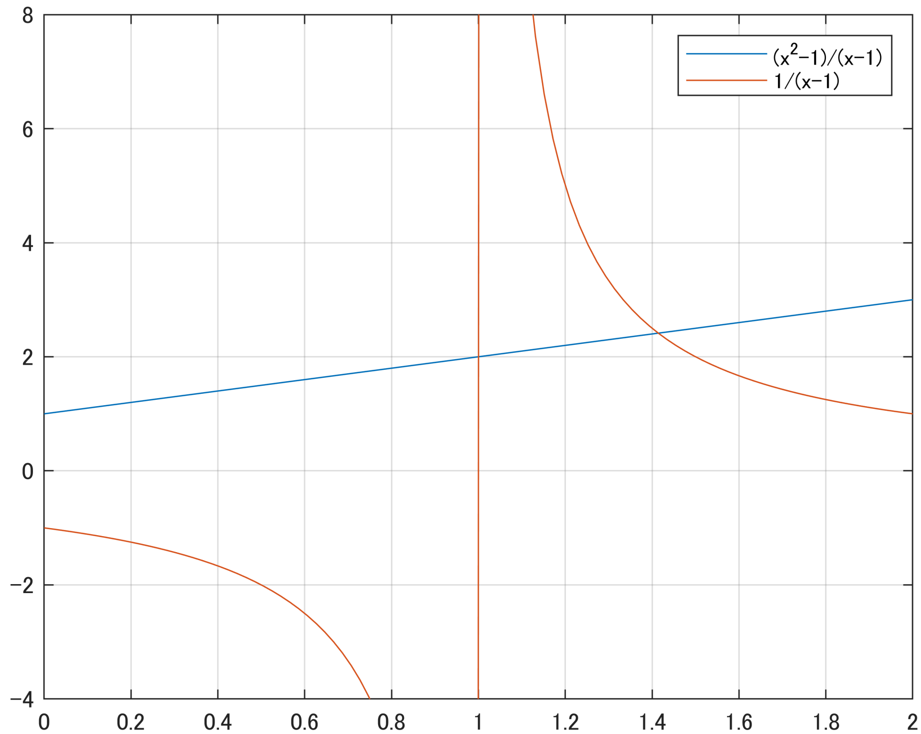
ある $x = a$ では関数の値が定義できないが、その上下から同じ値 ℓ に近づいていく場合もやはり、「xが a に近づくときの関数 $f(x)$ の極限は ℓ である」という

別の計算方法: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

例4: $\lim_{x\to 1+}\dfrac{1}{x-1} = \infty$。一方，$\lim_{x\to 1-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$ であるので，$\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ は存在しない

実際に図をかいてみると

```
clf
x = linspace(0,2);
plot(x,f(x))
hold on
plot(x,1./(x-1))
hold off
ylim([-4,8])
legend('(x^2-1)/(x-1)','1/(x-1)')
grid on
```



3-5 微分係数と導関数

x が a から $a+h$ まで変わるときの $f(x)$ の平均変化率: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$h \to 0$ の極限を考えたものを「微分係数」と呼ぶ: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\dfrac{df}{dx}(a), \dfrac{df}{dx}|_{x=a}$ などとも書く 導関数 各点で微分可能であるとき、それぞれの a に対して一つの $f'(a)$ が決まる。それらを全て集めると関数 $f'(x)$ が定義できる。「導関数」と呼ぶ

例1: $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数, $f(x)$ の導関数

例2: x^n の導関数 高階微分 $f'(x)$ もやはり x の関数なので、それの微分を考えることが可能。n 回微分したものを n 階導関数と呼び, $f^{(n)}(x)$ と書く

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$$

例: x^4 の2階導関数、3階導関数 指数関数の微分 一般の底 $f(x) = a^x$ の場合

$$f'(x) = (a^x)' = \lim_{h\to 0}(a^{(x+h)} - a^x)/h = a^x \lim_{h\to 0}(a^h - 1)/h = f(x)f'(0)$$

$\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h$ は x によらず，a のみに依存

$\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h=1$ となるような a を選ぶと，$f'(x)=f(x)$ となって便利

そのような a を e と書く。ネイピア数と呼ぶ。 $e=2.71828182846\cdots$ (無理数)

$a=e$ の場合、何回微分しても e^x （指数関数の傾きも指数関数）対数関数の微分 対数関数は指数関数の逆関数

$y=f(x)=\log x$ の導関数

$f'(x)=1/f'^{-1}(y=f(x))=1/e^y=1/e^{\log x}=1/x$$ 対数微分 $y=f(x)$ が微分可能であるとき，$z=\log y=\log f(x)$ の導関数は（合成関数の微分）

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}=(1/y)f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$$ 底が e ではない場合 $y=a^x$ の両辺の対数をとると $\log y=x\log a$

両辺をxで微分すると $y'/y=\log a$

$y'=(\log a)y=(\log a)a^x$$ 接線の方程式 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線

点 $(a,f(a))$ を通り、傾き $f'(a)$ の直線

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

あるいは少し変形して

$f'(a)(x-a)-(y-f(a))=0$$ 法線 曲線上の点 $P=(a,f(a))$ でその点における接線に垂直な直線

接線の傾きは $f'(a)$ 、法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$

法線の方程式

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

あるいは少し変形して

$$(x-a)+f'(a)(y-f(a))=0$$

例題: $y=\exp x$ の $x=2$ における接線と法線の方程式を求め、プロットしてみよ

3-6 多項式近似とテイラー展開

点 $P=(a,f(a))$ における接線は曲線（関数）を直線で近似したもの

二次式、三次式 $\cdots$ で近似すると？

近似式 $p(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots$

- $x=a$ を代入すると $f(a)=a_0$
- x で一回微分した後で $x=a$ を代入すると $f'(a)=a_1$

- x で二回微分した後で $x=a$ を代入すると $f''(a) = 2a_2 \to a_2 = f''(a)/2$
- n 回微分した後で $x=a$ を代入すると $f^{(n)}(a) = n!\,a_n \to a_n = f^{(n)}(a)/n!$

テイラー展開（より正確には $x=a$ のまわりでのテイラー展開）

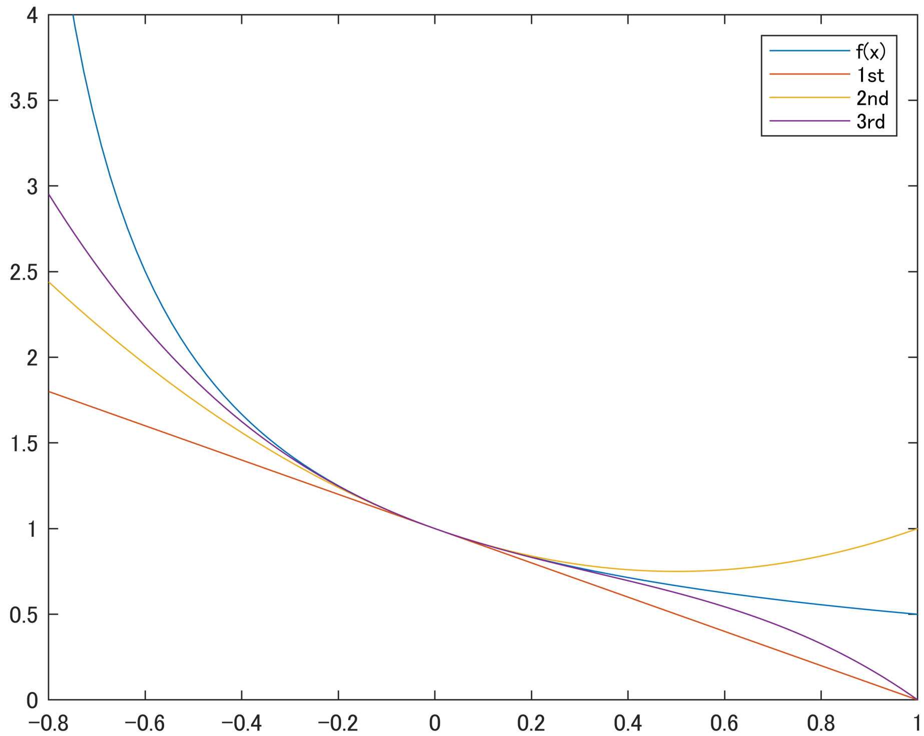
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 \cdots$$

例: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ の $x=0$ のまわりでの多項式近似

$f(x) = (1+x)^{-1},\ f'(x) = -(1+x)^{-2},\ f''(x) = 2(1+x)^{-3}\ \cdots\quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}$

- 一次近似 $f(x) \simeq 1 - x$
- 二次近似 $f(x) \simeq 1 - x + x^2$
- 三次近似 $f(x) \simeq 1 - x + x^2 - x^3$

```
clf
x = linspace(-0.8,1);
plot(x,1./(1+x))
hold on
plot(x,1-x)
plot(x,1-x+x.^2)
plot(x,1-x+x.^2-x.^3)
hold off
ylim([0 4])
legend('f(x)','1st','2nd','3rd')
```



対数関数のテイラー展開

$\log x \simeq \log a + (1/a)(x-a) + \cdots$

$x=1$ の近傍では $\log x \simeq (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 \cdots$

$x \to x+1$ と置き換えると $\log(1+x) \simeq x - x^2/2 + x^3/3 \cdots$

72の法則

複利で利子が r %のとき、2倍になるのに要する年数 n は $(1+r/100)^n = 2$ の解

両辺の自然対数を取ると $n\log(1+r/100) = \log 2$

$r/100$ が1より十分小さい時、テイラー展開の1次の項まで取ると $\log(1+r/100) \simeq r/100$

$\to$ $n(r/100) = \log 2$

$\to$ $n = 100\log 2/r = 69.31\cdots/r$

69.3の代わりに約数の多い72を使うことが多い

例題: いろいろな r に対して、72の法則がどの程度成り立つか確認せよ