第3講 指数関数/対数関数、一変数関数の微分、三次元プロット

3-1 指数関数（復習）

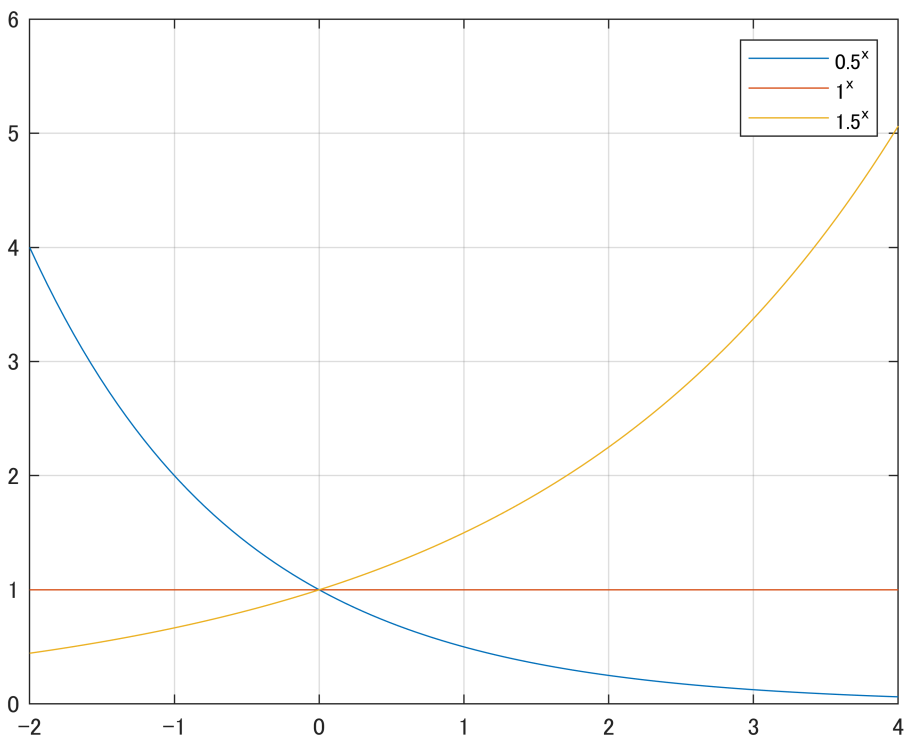
a を正の定数として指数関数 a^x を考える

一般の実数 x についていくらでも近い n/m (n, mは整数) を考えることができる

$a^{n/m} = (a^{1/m})^n$ $\Rightarrow$ a の m 乗根 (m回掛けたら a になる数) を n 回掛けたもの $\Rightarrow$ a^x が定義できる

$y = a^x$ を(a を底とする) 指数関数と呼ぶ 指数関数のグラフ 図: $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ の場合

```
clf
x = linspace(-2,4);
plot(x,0.5.^x) % a = 0.5, 単調減少
hold on
plot(x,1.^x)   % a = 1,   定数
plot(x,1.5.^x) % a = 1.5, 単調増加
hold off
legend('0.5^x','1^x','1.5^x')
grid on
```



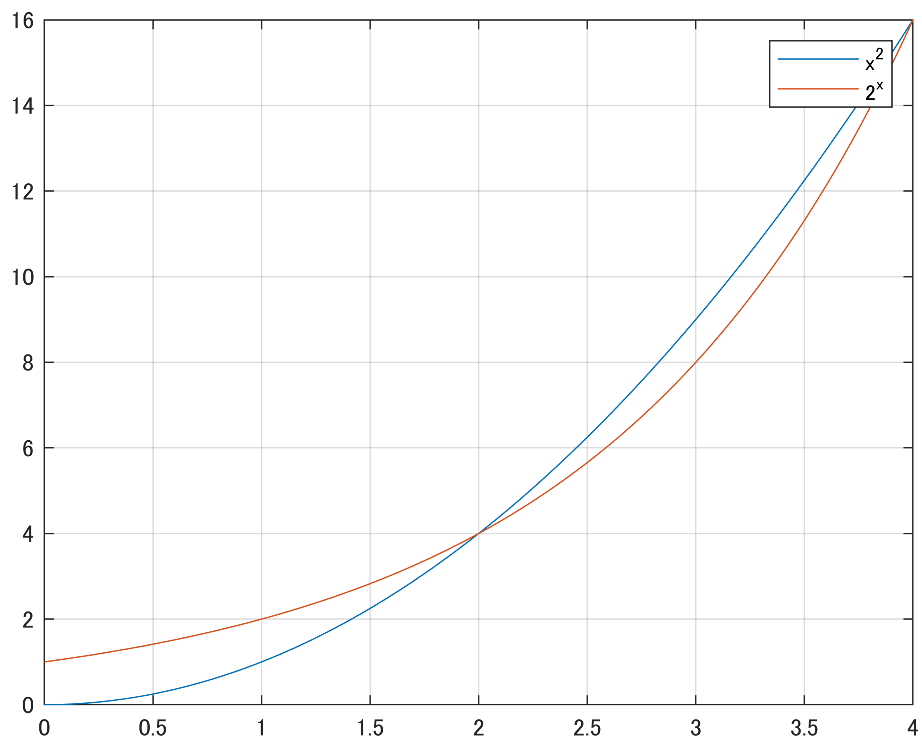
指数関数の底

底が $e = 2.71828182846\cdots$ (ネイピア数) の場合 $\Rightarrow$ 底が e の指数関数 e^x を $\exp x$ と書く

底を e にすると微分が便利

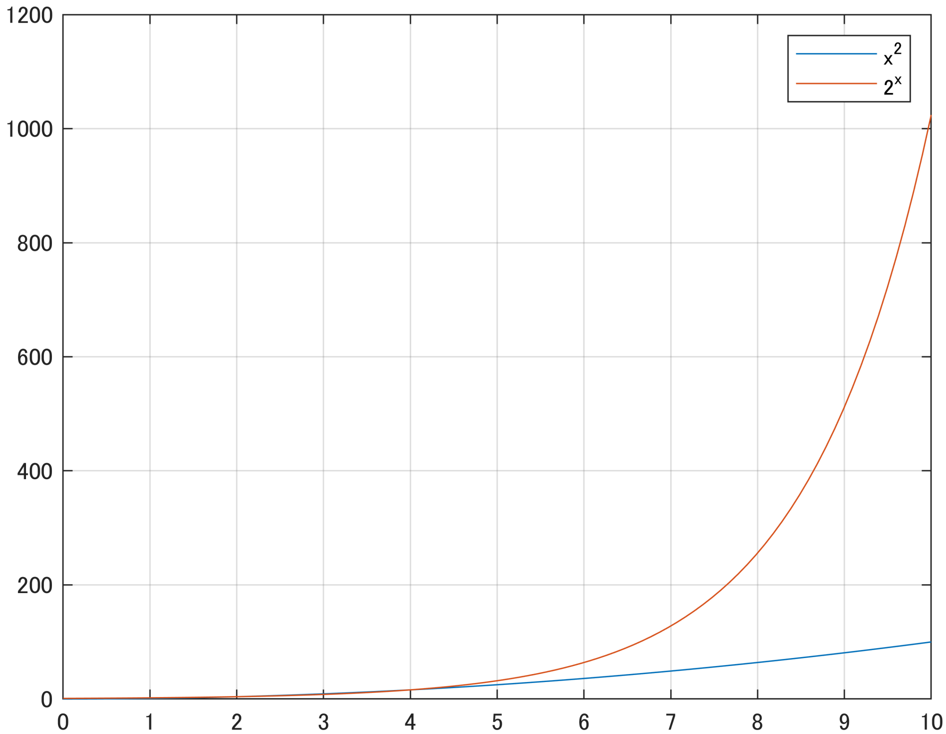
「底が e の指数関数」を単に「指数関数」と呼ぶことが多い べき関数と指数関数の違い x^2 と 2^x のどちらが速く増える?

```
clf
x = linspace(0,4);
plot(x,x.^2)
hold on
plot(x,2.^x)
hold off
legend('x^2','2^x')
grid on
```



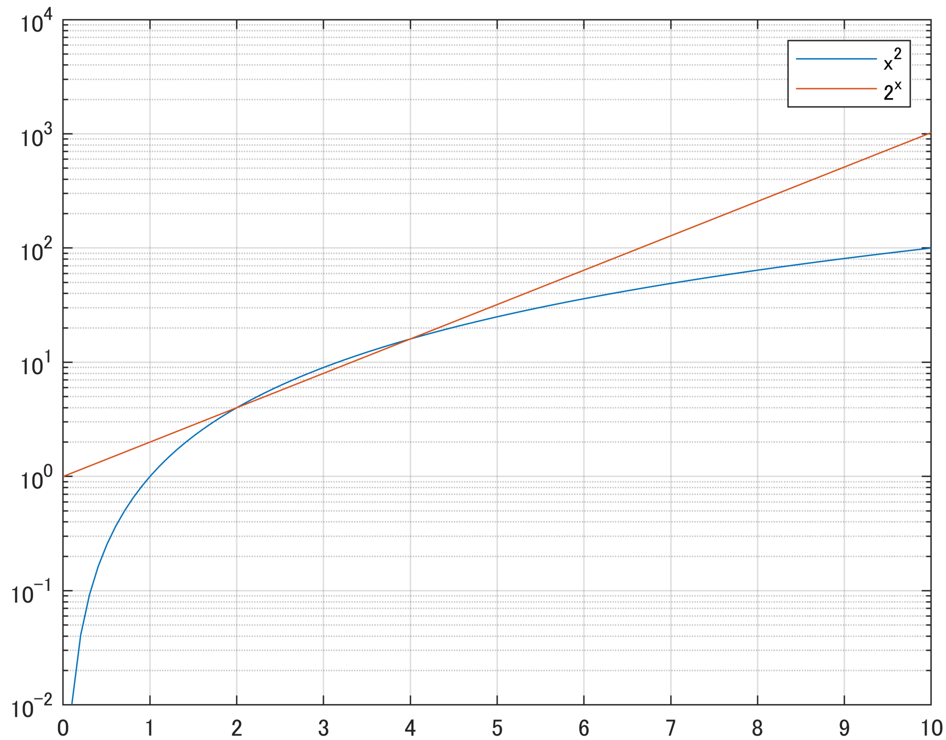
もう少し大きな x までプロットしてみる

```
clf
x = linspace(0,10);
plot(x,x.^2)
hold on
plot(x,2.^x)
hold off
legend('x^2','2^x')
grid on
```



縦軸を対数でプロット（片対数グラフ）

```
clf
x = linspace(0,10);
semilogy(x,x.^2)
hold on
semilogy(x,2.^x)
hold off
legend('x^2','2^x')
grid on
```

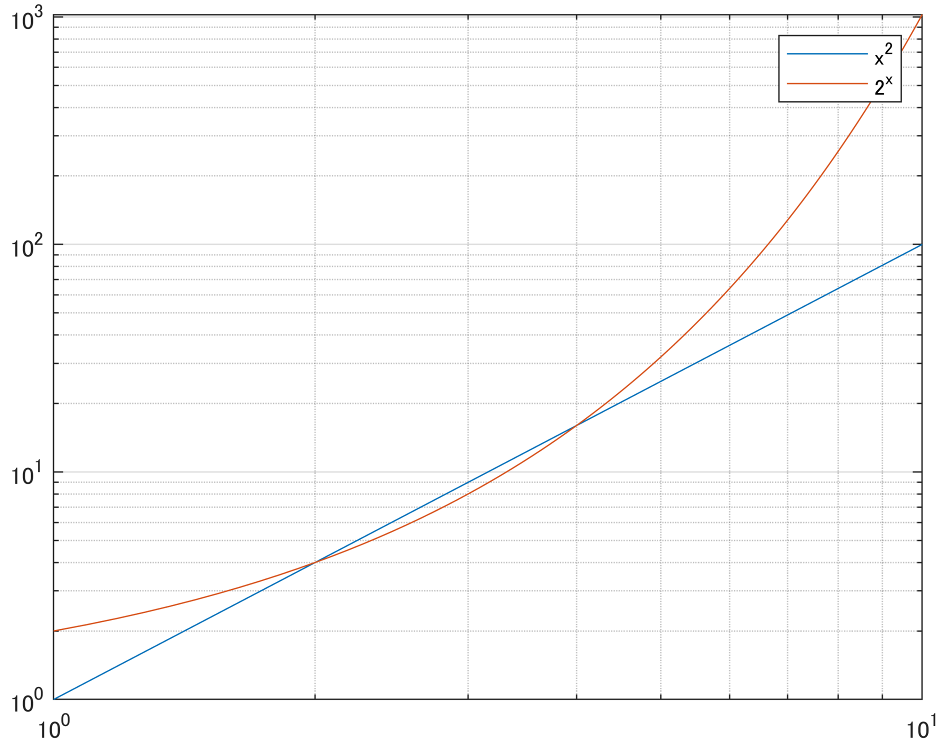


指数関数は縦軸を対数でプロットすると直線になる（底が傾きを与える）

例題）いろいろな底について指数関数を片対数プロットしてみよ

縦軸・横軸とも対数でプロット（両対数グラフ）

```
clf
x = linspace(1,10);
loglog(x,x.^2)
hold on
loglog(x,2.^x)
hold off
legend('x^2','2^x')
grid on
```



べき関数は両対数プロットすると直線になる（べきが傾きを与える）

3-2 逆関数

関数 $y = f(x)$ を $x = g(y)$ の形に書き直したもの。 f の逆関数であることが分かるように、 $x = f^{-1}(y)$ と書くことが多い

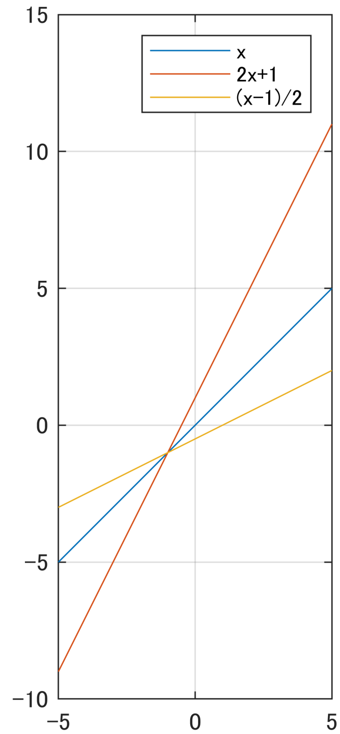
逆関数のグラフ：もともとの関数のグラフを斜め45度の線に関して引っくり返せばよい

例1) $y = 2x + 1$ の逆関数 $\rightarrow$ $x = (y - 1)/2$

```
clf
x = linspace(-5,5)
```

```
x = 1×100
   -5.0000   -4.8990   -4.7980   -4.6970   -4.5960   -4.4949   -4.3939   -4.2929 ···
```

```
plot(x,x) % 斜め45度の線
hold on
plot(x,2*x+1)
plot(x,(x-1)/2)
hold off
legend('x','2x+1','(x-1)/2')
daspect([1 1 1]) % 縦軸と横軸のスケールを同じにする
grid on
```

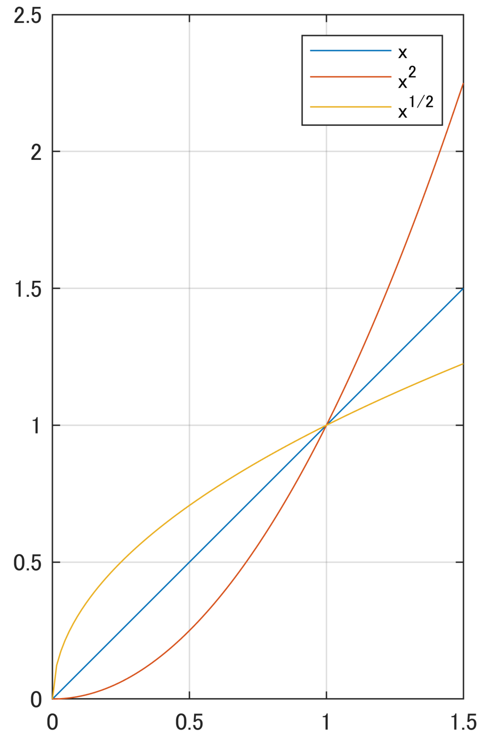


例2) $y=x^2$ の逆関数 → $x=\pm\sqrt{y}$ (符号はどちらかを選ぶ)

```
clf
x = linspace(0,1.5)
```

```
x = 1×100
         0    0.0152    0.0303    0.0455    0.0606    0.0758    0.0909    0.1061 ⋯
```

```
plot(x,x) % 斜め45度の線
hold on
plot(x,x.^2)
plot(x,sqrt(x))
hold off
legend('x','x^2','x^{1/2}')
daspect([1 1 1]) % 縦軸と横軸のスケールを同じにする
grid on
```



3-3 対数関数（復習）

指数関数の逆関数

年 5% の複利で倍になるまでにかかる年数 ⇒ $(1.05)^n = 2$ となる n

$\log_{1.05} 2$ と書く (14.2年くらい)

一般に $a^y = x$ と満たす y を $\log_a x$ と書く(a は 1 でない正の定数)。 a を底とする対数関数と呼ぶ 対数関数の性質

- $\log_a 1 = 0$ ($a^0 = 1$ より)
- $\log_a a = 1$ ($a^1 = a$ より)
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(x^p) = p \log_a x$
- $a^x = b^{x \log_b a}$
- $\log_a x = (\log_b x)/(\log_b a)$ 対数の底 底 a が10の場合 ⇒ 常用対数。例: $\log_{10} 1000 = 3$

底 a が2の場合 ⇒ コンピュータサイエンスでよく出てくる

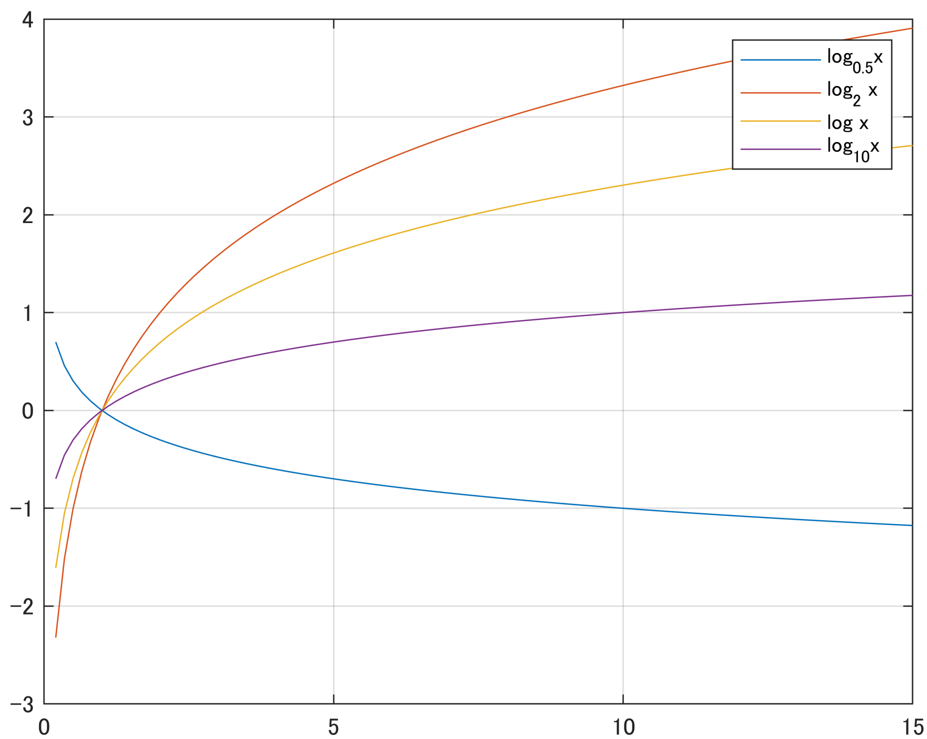
- 2進数を考えるときに便利

- 例: $\log_2 1000 \simeq 10$ $(2^{10} = 1024)$

底が $e = 2.71828182846\cdots$ (ネイピア数) の場合 ⇒ → 自然対数、単に $\log x$ あるいは $\ln x$ と書く

- 底を e にすると微分が便利 底が0.5, 2, e , 10の場合の対数関数の振る舞い

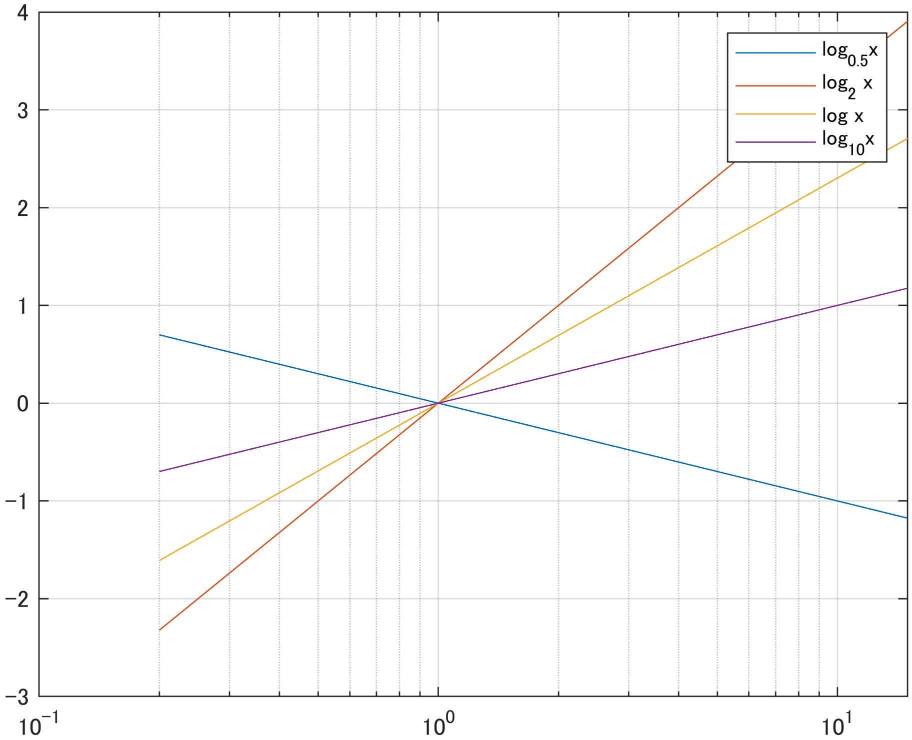
```
clf
x = linspace(0.2,15);
plot(x,log(x)/log(0.1))
hold on
plot(x,log(x)/log(2))
plot(x,log(x))
plot(x,log(x)/log(10))
hold off
legend('log_{0.5}x','log_2 x','log x','log_{10}x')
grid on
```



横軸を対数 (片対数プロット)

```
clf
x = linspace(0.2,15);
semilogx(x,log(x)/log(0.1))
hold on
semilogx(x,log(x)/log(2))
semilogx(x,log(x))
semilogx(x,log(x)/log(10))
```

```
hold off
legend('log_{0.5}x','log_2 x','log x','log_{10}x')
grid on
```



底(の対数の逆数)が傾きを与える