数理手法VI

第１２回

4.5 確率微分方程式

確率微分方程式

T を正定数，$a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ボレル可測関数として，

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dB_s, \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

を満たす確率過程 $(X_t)_{t\in[0,T]}$ を求める問題を考える．

この方程式は形式的に微分形で

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T] \tag{2}$$

と書かれ，確率微分方程式と呼ばれる．a はドリフト係数，b は拡散係数と呼ばれる．

- 確率微分方程式は，右辺第二項がなければ（一階線形）微分方程式になる．

確率微分方程式の解

定義 4.12
確率過程 $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ が，$(b(X_t))_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $(a(X_t))_{t\in[0,T]}$ が発展的可測かつ $\int_0^T |a(X_t)|dt < \infty$ *a.s.* を満たし，さらに *(1)* 式を満たす時，X を確率微分方程式 *(2)* の（強）解であるという．この時，X は拡散過程であるともいう．

- 拡散過程は常に連続なパスをもつ．

確率微分方程式の例

例 4.13 (ブラック・ショールズ・モデル)

例 *4.9* で見たように

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

に対して，伊藤の公式から

$$S_t = S_0 + \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

となる．

よって $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ は確率微分方程式：

$$dX_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

の解となっていることがわかる．

確率微分方程式の例

例 4.14 (Ornstein-Uhlenbeck 過程)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ に対し，確率微分方程式：

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$$

の解を *Ornstein-Uhlenbeck* 過程という．

$e^{-\mu t} X_t$ に（多次元版）伊藤の公式を使うと，（$\varphi(t,x) = e^{-\mu t} x$）

$$\begin{aligned} e^{-\mu t} X_t &= X_0 + \int_0^t -\mu e^{-\mu s} X_s ds + \int_0^t e^{-\mu s} (\mu X_s ds + \sigma dB_s) \\ &= X_0 + \int_0^t e^{-\mu s} \sigma dB_s. \end{aligned}$$

よって，

$$X_t = e^{\mu t} X_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dB_s$$

と解が求まる．実際このように定まる X_t に対して，伊藤の公式を適用すれば解になっていることがチェックできる．

解の存在と一意性

定理 4.15 (強解の存在と一意性)

ある $C > 0$ があって，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$|a(x) - a(y)| \le C|x - y|, \quad |b(x) - b(y)| \le C|x - y|, \tag{3}$$

$$|a(x)| \le C(1 + |x|), \quad |b(x)| \le C(1 + |x|) \tag{4}$$

を満たす時，確率微分方程式は一意な（強）解を持つ．

- 一意の意味は，２つの解 X_t, Y_t に対し，

  $$P(X_t = Y_t \ (t \in [0, T])) = 1$$

  が成り立つということ．
- (3) が成り立つ時，a, b はリプシッツ連続という．
- (4) が成り立つ時，a, b は線形増大であるという．

Cox-Ingersoll-Ross 過程

$a, b, \sigma > 0$ に対し，確率微分方程式：

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t$$

を考える．$2ab > \sigma^2$ の時，解が一意に存在し，$X_t > 0$ a.s. となる．
（上の定理の条件は満たさない）

解は Cox-Ingersoll-Ross 過程と呼ばれ，金利の変動を表すモデルとして使われている．

- 確率微分方程式は解が一意に存在することがわかれば，確率過程が定まり，モデルとして用いることができる．

Brownian bridge

$b \in \mathbb{R}$ に対して，確率微分方程式：

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dB_t, \quad t \in [0, 1]$$

の解 $(X_t)_{t \in [0,1]}$ を Brownian bridge という.

$b = 1$, $X_0 = 0$ の時，伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t - 1}{1 - t}\right) &= \frac{dX_t}{1 - t} + \frac{X_t - 1}{(1 - t)^2} dt \\ &= \frac{1 - X_t}{(1 - t)^2} dt + \frac{1}{1 - t} dB_t + \frac{X_t - 1}{(1 - t)^2} dt \\ &= \frac{1}{1 - t} dB_t. \end{aligned}$$

Brownian bridge

よって $X_0 = 0$ に注意して，

$$\frac{X_t - 1}{1 - t} = -1 + \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

ゆえに

$$X_t = t + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

X_t は正規分布に従うことがわかり，$E[X_t] = t$. また，Itô isometry より

$$\begin{aligned} E[(X_t - t)^2] &= E\left[(1-t)^2 \left\{ \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \right\}^2\right] \\ &= (1-t)^2 \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2} ds = t(1-t). \end{aligned}$$

Brownian bridge

よって $t \nearrow 1$ の時，$E[(X_t - t)^2] \to 0$ なので，$X_1 = 1$ a.s.

つまり，Brownian bridge は $X_0 = 0$, $X_1 = 1$ a.s. でその間をランダムに動く確率過程となる．

ディリクレ問題

確率微分方程式と偏微分方程式の関係を考える．
D を $\mathbb{R}^d$ 内の有界領域で境界 ∂D は滑らかとする．偏微分方程式：

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & (x \in D) \\ u(x) = \phi(x) & (x \in \partial D) \end{cases} \tag{5}$$

の解 $u = u(x)$ を考える．このような u を求める問題をディリクレ問題という．

ある行列値関数 $\sigma_{ij}(x)$ に対して，

$$a_{i,j}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x) \quad (x \in D)$$

を満たすとすると，(5) 式は伊藤の公式に対応する形になっている．

ディィリクレ問題

各 b_i, σ_{ij} は線形増大かつリプシッツ連続とする．$B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ を d 次ブラウン運動とすると，一次元の場合と同様に確率微分方程式：

$$dX_t^i = b_i(X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(X_t)dB_t^j \quad (1 \leq i \leq d)$$

は一意の解を持つことが示される.

$X_0 = x$ a.s. を満たす解を $(X_t^x)_t$ と書く.

この確率過程を用いて，ディリクレ問題の解の一意性を示す.

ディィリクレ問題

任意の $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，多次元版の伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
E[f(X_t^x)] &= f(x) + E\left[\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s^x) b_i(X_s^x) ds\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} E\left[\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^x)\sigma_{ik}(X_s^x)\sigma_{jk}(X_s^x) ds\right] \\
&= f(x) + E\left[\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_j} b_i(X_s^x) + \sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(X_s^x)\right) ds\right].
\end{aligned}
$$

- 確率積分項はマルチンゲールなので，期待値はゼロになる．
- さらに f が (5) の解となる時，上式右辺第二項はゼロになる．

ディリクレ問題

停止時刻 τ を

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 | X_t(\omega) \in \partial D\}$$

と定めると，上と同様に任意停止定理より，(5) の解 u に対し，

$$u(x) = E[u(X_\tau^x)] = E[\phi(X_\tau^x)].$$

これは (5) の解の一意性を意味する．

Feynman-Kac の公式

偏微分方程式：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Vu + g \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^d) \\ u(0,x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{6}$$

の解 $u = u(t,x)$ を考える．このような u を求める問題をコーシー問題という．

伊藤の公式を用いた議論からコーシー問題の解 u は先程の X_t^x に対して

$$u(t,x) = E\left[f(X_t^x) \exp\left(\int_0^t V(X_s^x) ds \right) + \int_0^t g(X_s^x) \exp\left(\int_0^s V(X_r^x) dr \right) ds \right]$$

を満たす．よってコーシー問題の一意性が成り立つ．

これを Feynman-Kac の公式という．

Feynman-Kac の公式

- 確率微分方程式と偏微分方程式の関係についての詳細は,
  - 舟木「確率微分方程式」5.4 節，5.6 節
  - Chapter 4 in Karatzas and Shreve

  を見よ.