数理手法VI

第１１回

4.4 オプション価格理論

ブラック・ショールズ・モデル

F. ブラック，M. ショールズ，R. マートンによるヨーロッパ・オプションの価格理論を紹介する．

時刻 $t \in \mathbb{R}_+$ における株価を S_t と書き，$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma, S_0 > 0$, ブラウン運動 $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に対して，

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

を満たすとする．

単位時間あたりの預金金利を $\tilde{r} \geq 0$ とすると，$t \in \mathbb{N}$ の時，時刻 0 で 1 円預けると，時刻 t で $(1+\tilde{r})^t$ 円になる．

ブラック・ショールズ・モデル

$r = \log(1+\tilde{r})$ とすると，$(1+\tilde{r})^t = e^{rt}$ と書ける．$t \notin \mathbb{N}$ の時も時刻 t で e^{rt} 倍になるとする（連続複利）．

初期資産が S_0 円の時，株式を 1 株買った場合，時刻 t での資産価値は S_t 円．預金した時に時刻 t で S_t 円を得るには時刻 0 で $e^{-rt}S_t$ 円が必要．

この時，時刻 t での S_t 円の現在価値（時刻 0 での価値）は $e^{-rt}S_t$ 円であるという．

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をブラウニアン・フィルトレーションとする．

仮定 1 ：$(e^{-rt}S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $\mathbb{F}$-マルチンゲールであるとする．

ブラック・ショールズ・モデル

ブラック・ショールズ・モデルの下，

$$e^{-rt}S_t = S_0 \exp((\mu - r)t + \sigma B_t)$$

なので，例 4.9 より仮定 1 を満たすには，$\mu = r - \sigma^2/2$ が必要十分.

この時伊藤の公式より

$$e^{-rt}S_t = S_0 + \int_0^t \sigma e^{-rs} S_s dB_s. \tag{1}$$

ヨーロッパ・オプション

$u > 0$, $K > 0$ として,
「時刻 u に K 円で 1 株買える権利」
をヨーロッパ・コール・オプションという.

このオプションを時刻 $t \in [0, u)$ にいくらで売ればいいかを考える.

オプションを買った企業の利益は,

$$\left.\begin{array}{l} S_u > K \Longrightarrow S_u - K \\ S_u \leq K \Longrightarrow 0 \end{array}\right) = (S_u - K)^+.$$

オプションを売った銀行の損失は, $-(S_u - K)^+$ となり, 株式の売買運用により, この損失を補填することを考える.

株式運用の利益

時刻 t での資産を X_t 円として，時刻 $t \in [0, u]$ で π_t 株保有し，残りを預金するとすると，時刻 t から $t + \Delta t$ での利益の現在価値は (1) より

$$\pi_t(e^{-r(t+\Delta t)}S_{t+\Delta t} - e^{-rt}S_t) \approx \sigma\pi_t e^{-rt}S_t(B_{t+\Delta t} - B_t).$$

よって時刻 0 から t まで利益を積み上げて積分表示すると，

$$e^{-rt}X_t = X_0 + \int_0^t \sigma\pi_s e^{-rs}S_s dB_s. \tag{2}$$

オプション価格

オプションによる損失の現在価値は $-e^{-ru}(S_u - K)^+$.

$$M_t = E[e^{-ru}(S_u - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

とおくと，$(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ はマルチンゲールなので，マルチンゲール表現定理より，$\gamma = (\gamma_t)_{t\in[0,u]} \in \mathcal{L}^2[0,u]$ があって，

$$M_t = \int_0^t \gamma_s dB_s + M_0. \tag{3}$$

また，$\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{N})$ で，任意の確率変数と独立になるので，条件付期待値の性質から

$$M_0 = E[e^{-ru}(S_u - K)^+ | \mathcal{F}_0] = E[e^{-ru}(S_u - K)^+].$$

オプション価格

よってオプションを $V_0 = E[e^{-ru}(S_u - K)_+]$ 円で売って，$X_0 = V_0$,

$$\pi_s = \frac{e^{rs}\gamma_s}{\sigma S_s}$$

として株式運用すると，時刻 u の運用資産の現在価値は (2), (3) より

$$e^{-ru}X_u = V_0 + \int_0^u \gamma_s dB_s = M_u = e^{-ru}(S_u - K)^+$$

となり，オプションの損失を相殺する．

ゆえに時刻 0 で $V_0 = E[e^{-ru}(S_u - K)_+]$ 円でオプションを売ればよい．

オプション価格

- 株式運用による損失の相殺（これをヘッジという）を考えなくても，オプション損失の現在価値の期待値である $E[e^{-ru}(S_u - K)_+]$ でオプションをたくさん売れば損失は平均的に期待値に近い値となり問題ないように思える
- しかし，オプションはたくさん売るとは限らないのと，オプションの損失は株価と高い連動性があるので，独立性が成り立たず，たくさん売っても損失の合計が平均に近い値になるとは限らないので，ヘッジをしないとリスクを回避できない．
- 時刻 $t \in (0, u)$ におけるオプション価格は同様の議論で

$$V_t = E[e^{-r(u-t)}(S_u - K)^+|\mathcal{F}_t]$$

となる．

ブラック・ショールズ・マートンの公式

時刻 t のオプション価格

$$V_t = E[e^{-r(u-t)}(S_u - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

を計算する．$\sigma(B_u - B_t)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立なので，$\tau = u - t$, $R = (r - \sigma^2/2)\tau$ とすると，命題 2.6 と同様の式より

$$\begin{aligned} V_t &= E[e^{-r\tau}(S_t e^R e^{\sigma(B_u - B_t)} - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= E[e^{-r\tau}(x e^R e^{\sigma(B_u - B_t)} - K)^+]|_{x=S_t}. \end{aligned}$$

(命題 2.6 は $\sigma(X)$ の形の σ-加法族に対する公式だが，$\mathcal{G}$: 部分加法族に対して，X: $\mathcal{G}$-可測，$\sigma(Y)$ と $\mathcal{G}$ は独立としても成り立つ．Resnick 10.3 (12))

ブラック・ショールズ・マートンの公式

$B_u - B_t \sim N(0, \tau)$ なので,

$$-\frac{B_u - B_t}{\sqrt{\tau}} \sim N(0, 1).$$

よって

$$V_t = \int e^{-r\tau}(xe^R e^{-\sigma\sqrt{\tau}y} - K)^+ \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \bigg|_{x=S_t}.$$

(確率変数 $X \sim \mu_X$ に対し， $E[f(X)] = \int f(y)\mu_X(dy)$.)

ここで

$$S_t e^R e^{-\sigma\sqrt{\tau}y} > K \iff y < \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\log\frac{S_t}{K} + R\right) =: d_-.$$

ブラック・ショールズ・マートンの公式

よって $N(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$（標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数）とおくと，

$$V_t = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp\left(-\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau} y - \frac{\sigma^2}{2}\tau \right) dy - e^{-r\tau} K N(d_-).$$

exp の中は $-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2$ と書けるので，$z = y + \sigma\sqrt{\tau}$ で変数変換すると，$d_+ = d_- + \sigma\sqrt{\tau}$ に対し，

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_- + \sigma\sqrt{\tau}} e^{-z^2/2} dz - e^{-r\tau} K N(d_-) \\ &= S_t N(d_+) - e^{-r(u-t)} K N(d_-). \end{aligned}$$

(ブラック・ショールズ・マートンの公式)

ブラック・ショールズ・マートンの公式

- $N(y)$ は数値計算できるので，σ がわかれば，オプション価格が計算される．σ を求めるには，株価 S_t の過去データを使って統計的に求めることができる．
- 日経平均株価のオプションのように活発に取引されているオプションであれば，安定的な市場価格が定まっている．つまり，V_t がわかるので，ブラック・ショールズ・マートンの公式から σ を逆算することもできる．このように求めた σ はインプライド・ボラティリティと呼ばれる．
- インプライド・ボラティリティは市場価格から計算されているので，過去データから計算した σ と違って，将来のどの程度株価が変動するかという投資家達の予測が反映されていると考えられ,「恐怖指数」とも呼ばれる．

プット・オプション

「時刻 u に K 円で 1 株 売れる 権利」

をヨーロッパ・プット・オプションという.

オプションを買った企業の利益は,

$$\left.\begin{array}{l} S_u < K \Longrightarrow K - S_u \\ S_u \geq K \Longrightarrow 0 \end{array}\right) = (K - S_u)^+.$$

よってこのオプションの適正価格を U_t とすると，コール・オプションの場合と同様に

$$U_t = E[e^{-r(u-t)}(K - S_u)^+ | \mathcal{F}_t]$$

となる．この時，株式の売買運用によりオプションの損失を相殺することができる.

プット・オプション

ここで，

$$(S_u - K)^+ - (K - S_u)^+ = S_u - K$$

となる．
($S_u \geq K$ なら左辺は第一項だけ残り，右辺に一致する．
$S_u < K$ なら左辺は第二項だけが残り，やはり右辺に一致．)

よって

$$\begin{aligned} V_t - U_t &= E[e^{-r(u-t)} \left\{(S_u - K)^+ - (K - S_u)^+\right\} |\mathcal{F}_t] \\ &= E[e^{-r(u-t)}(S_u - K)|\mathcal{F}_t] \\ &= E[e^{-r(u-t)} S_u|\mathcal{F}_t] - e^{-r(u-t)} K. \end{aligned}$$

プット・コール・パリティ

仮定 1 より $(e^{-rt}S_t)_{t\mathbb{R}_+}$ はマルチンゲール．よって，

$$E[e^{-ru}S_u|\mathcal{F}_t] = e^{-rt}S_t.$$

ゆえに

$$V_t - U_t = S_t - e^{-r(u-t)}K.$$

この関係式はプット・コール・パリティと呼ばれる．

この式を用いるとブラック・ショールズ・マートンの公式から

$$\begin{aligned} U_t &= S_tN(d_+) - e^{-r(u-t)}KN(d_-) - S_t + e^{-r(u-t)}K \\ &= S_t(1 - N(d_+)) - e^{-r(u-t)}K(1 - N(d_-)) \end{aligned}$$

と求まる．

参考文献

オプション価格理論や関連する数理ファイナンスの詳細に関しては，参考文献のシュリーヴのテキストを見よ（今回の議論は 5 章に詳しい）．例えば，

- 仮定 1 が満たされない場合の議論
（確率測度 P を別の確率測度 Q に置き換えることで Q の下で仮定 1 が満たされるようにする）
- 株式保有比率 π_t の具体的な計算方法
- ヨーロッパ・オプション以外のオプション

等に関して学ぶことができる．