

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 数理手法VI 2020 荻原哲平

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



数理手法VI

第10回

一般の $f \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対する確率積分

$f = (f_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対して, 補題 4.3 の $(f_t^{(n)})_{t \in [0, T], m \in \mathbb{N}}$ をとると, 補題 4.2, 4.3 より, $m, n \rightarrow \infty$ の時,

$$E \left[\left| \int_0^T f_t^{(m)} dB_t - \int_0^T f_t^{(n)} dB_t \right|^2 \right] = \|(f_t^{(m)} - f_t^{(n)})_{t \in [0, T]}\|_{\mathcal{L}^2}^2 \rightarrow 0.$$

よって $(\int_0^T f_t^{(n)} dB_t)_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ のコーシー列になる.

$L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ は完備距離空間なので, ある $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ があって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(X - \int_0^T f_t^{(n)} dB_t \right)^2 \right] = 0.$$

つまり, X は $(\int_0^T f_t^{(n)} dB_t)_{n \in \mathbb{N}}$ の極限になる.

一般の $f \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対する確率積分

$\int_0^T f_t dB_t := X$ と定める. これを $(f_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ の確率積分と呼ぶ. このような X は a.s. に一意に定まるので, 確率積分も a.s. に一意に定まる.

まずは $\int_0^T f_t dB_t$ が階段過程 $(f_t^{(n)})_{t \in [0, T], n \in \mathbb{N}}$ のとり方によらずに定まることを確認する.

$(g_t^{(n)})_{t \in [0, T], n \in \mathbb{N}}$ を別の階段過程の列で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f_t - g_t^{(n)})_{t \in [0, T]}\| = 0$$

とすると, 補題 4.2 より

一般の $f \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対する確率積分

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\int_0^T f_t^{(n)} dB_t - \int_0^T g_t^{(n)} dB_t \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^T (f_t^{(n)} - g_t^{(n)}) dB_t \right)^2 \right] \\ &= \| (f_t^{(n)} - g_t^{(n)})_{t \in [0, T]} \|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\leq 2 \| (f_t^{(n)} - f_t)_{t \in [0, T]} \|_{\mathcal{L}^2}^2 + 2 \| (g_t^{(n)} - f_t)_{t \in [0, T]} \|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\quad \left((x + y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \ (x, y \in \mathbb{R}) \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

よって $\int_0^T f_t^{(n)} dB_t$ と $\int_0^T g_t^{(n)} dB_t$ は同じ極限に収束し、 $\int_0^T f_t dB_t$ が一意に定まる。

4.2 確率積分の性質

確率積分の性質

$\int_0^T f_t dB_t$ は定義から \mathcal{F}_T -可測になる.

命題 4.4

$B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ をブラウン運動, $a, b \in \mathbb{R}$,
 $(f_t)_{t \in [0, T]}, (g_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ とする.

1. (線形性)

$$\int_0^T (af_t + bg_t) dB_t = a \int_0^T f_t dB_t + b \int_0^T g_t dB_t \quad \text{a.s.}$$

2. (*Itô isometry*, 等長性)

$$E \left[\left(\int_0^T f_t dB_t \right)^2 \right] = \|(f_t)_{t \in [0, T]}\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

確率積分の性質の証明

Proof.

1. $f_t^{(n)}, g_t^{(n)}$ を f_t, g_t に収束する階段過程列とすると, 定義から

$$\int_0^T (af_t^{(n)} + bg_t^{(n)})dB_t = a \int_0^T f_t^{(n)}dB_t + b \int_0^T g_t^{(n)}dB_t,$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \|(af_t^{(n)} + bg_t^{(n)} - af_t - bg_t)_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(2a^2 \|(f_t^{(n)} - f_t)_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 + 2b^2 \|(g_t^{(n)} - g_t)_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 \right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

よって $\int_0^T (af_t + bg_t)dB_t$ は $a \int_0^T f_t^{(n)}dB_t + b \int_0^T g_t^{(n)}dB_t$ の $n \rightarrow \infty$ の極限と等しくなるのでよい。

確率積分の性質の証明

2. 補題 4.2 より

$$E\left[\left(\int_0^T f_t^{(n)} dB_t\right)^2\right] = \|(f_t^{(n)})_t\|_{\mathcal{L}^2}^2. \quad (1)$$

確率変数 $X, X_n \in L^2$ に対して、コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} |E[X^2] - E[X_n^2]| &= |E[2X(X - X_n) - (X - X_n)^2]| \\ &\leq 2\sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[(X - X_n)^2]} + E[(X - X_n)^2]. \end{aligned}$$

よって $X = \int_0^T f_t dB_t$, $X_n = \int_0^T f_t^{(n)} dB_t$ とすれば, $E[(X - X_n)^2] \rightarrow 0$ なので, $|E[X_n^2] - E[X^2]| \rightarrow 0$. 右辺も $\|(f_t^{(n)} - f_t)_{t \in [0, T]}\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow 0$ を使って同様に $\|(f_t^{(n)})_{t \in [0, T]}\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow \|(f_t)_{t \in [0, T]}\|_{\mathcal{L}^2}$. ゆえに (1) の両辺の極限をとればよい. \square

確率積分のマルチンゲール性

$(f_s)_{s \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対して, $t \in (0, T]$ とすると,
 $(f_s)_{s \in [0, t]} \in \mathcal{L}^2[0, t]$ となるので, $M_t = \int_0^t f_s dB_s$ が定義される.

(\tilde{M}_t を別の定義とすると, 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $P(M_t = \tilde{M}_t) = 1$ となるが, $\{M_t \neq \tilde{M}_t\}$ は t に依存するので, M_t : 連続なパスをもち, \tilde{M}_t は a.s. $\omega \in \Omega$ で不連続となるようにとることもできる.
 M_t と \tilde{M}_t がともに右連続なパスをもてば, $P(M_t = \tilde{M}_t \text{ for any } t) = 1$ となり, M_t と \tilde{M}_t のパスの性質が同じになる.)

マルチンゲールの定義において, $\mathbb{R}_+ \rightarrow [0, T]$ とすると, $[0, T]$ 上のマルチンゲールが定義される.(右)連続マルチンゲールも同様.

命題 4.5

$(M_t)_{t \in [0, T]}$ は (確率ゼロの集合を調整すると) 連続マルチンゲールになる.

マルチンゲール性の証明

Proof. $(f_s)_{s \in [0, T]}$ に収束する階段過程列 $(f_s^{(n)})_{s \in [0, T]}$ をとると, 階段過程の確率積分の定義とブラウン運動の連続性より, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $t \mapsto \int_0^t f_s^{(n)} dB_s$ は連続. $n \rightarrow \infty$ とすれば, $t \mapsto M_t$ も連続にできる. (詳細は舟木「確率微分方程式」命題 3.14, 4.1 節)

定義から $M_t \in L^2$ で M_t は \mathcal{F}_t -可測. また, $t > u$, $A \in \mathcal{F}_u$ に対して,

$$E \left[\int_0^t f_s^{(n)} dB_s 1_A \right] = E \left[\int_0^u f_s^{(n)} dB_s 1_A \right]. \quad (2)$$

マルチンゲール性の証明

コーシー・シュワルツの不等式と命題 4.4 より

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_0^t f_s dB_s 1_A - \int_0^t f_s^{(n)} dB_s 1_A \right|^2 \right] \\ \leq E[1_A]^{1/2} E \left[\left(\int_0^t (f_s - f_s^{(n)}) dB_s \right)^2 \right]^{1/2} \\ = P(A)^{1/2} \| (f_s - f_s^{(n)})_{s \in [0, t]} \|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって $n \rightarrow \infty$ で $E[\int_0^t f_s^{(n)} dB_s 1_A] \rightarrow E[M_t 1_A]$ であり, $t \rightarrow u$ としても同様なので, (2) より $E[M_t 1_A] = E[M_u 1_A]$. よって $E[M_t | \mathcal{F}_u] = M_u$

a.s. □

マルチンゲール表現定理

定理 4.6

ブラウニアン・フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ に関するマルチンゲール $(X_t)_{t \in [0, T]}$ で $X_t \in L^2$ ($t \in [0, T]$) を満たすものに対して, ある $f \in \mathcal{L}^2[0, T]$ と定数 c があって,

$$X_t = c + \int_0^t f_s dB_s, \quad \text{a.s. } t \in [0, T].$$

特に $(X_t)_{t \in [0, T]}$ は (確率ゼロの集合を調整すれば) 連続なパスをもつ.

証明は舟木「確率微分方程式」定理 4.11 と系 4.12.

4.3 伊藤の公式

伊藤の公式

$C^k(\mathbb{R}^m)$ を k 階微分可能な関数 $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ であって、 φ とその k 階までの偏導関数が全て連続なもの全体とする。

確率過程 $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ が $f = (f_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ と $(u_t)_{t \in [0, T]}$: 発展的可測かつ $\int_0^T |u_t| dt < \infty$ a.s. に対し,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t f_s dB_s \quad t \in [0, T]$$

と書けるとする。(この時 X は伊藤過程と呼ばれる)

定理 4.7 (伊藤の公式)

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ で $(\varphi'(X_t)f_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ とすると、 $t \in [0, T]$ に対し、

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_s)u_s ds + \int_0^t \varphi'(X_s)f_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''(X_s)f_s^2 ds.$$

伊藤の公式

証明は舟木「確率微分方程式」4.2節を見よ.

形式的に $dX_t = u_t dt + f_t dB_t$ と書けば, 伊藤の公式は

$$d\varphi(X_t) = \varphi'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)f_t^2 dt$$

と書ける. 右辺第二項がなければ通常の合成関数の微分公式の形になる.

- ▶ 伊藤の公式の右辺の確率積分が定義できるためには $(\varphi'(X_t)f_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{L}^2[0, T]$ が必要であるが, 確率積分の定義を拡張すると, $\mathcal{L}^2[0, T]$ 以外の確率過程に対しても定義が可能になり, 伊藤の公式の $\varphi'(X_t)f_t$ の条件が不要になる. ただし, この場合確率積分の可積分性は保証されず, マルチンゲールになるとは限らない.

伊藤の公式の例

例 4.8

$\varphi(x) = x^2$, $X_t = B_t$ ($u_t \equiv 0, f_t \equiv 1$) とすると,
 $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi''(x) = 2$, $(\varphi'(B_t))_t \in \mathcal{L}^2[0, T]$ なので,

$$\begin{aligned} B_t^2 &= 0 + \int_0^t 2B_s \cdot 0 ds + \int_0^t 2B_s \cdot 1 dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 \cdot 1 ds \\ &= 2 \int_0^t B_s dB_s + t. \end{aligned}$$

よって $\int_0^t B_s dB_s = (B_t^2 - t)/2$ と確率積分が計算できる。また,
 $(B_t^2 - t)_{t \in [0, T]}$ がマルチンゲールになることがわかる。

伊藤の公式の例

例 4.9 (ブラック・ショールズ・モデル)

時刻 t の株価 S_t を $\mu \in \mathbb{R}$ と $\sigma > 0$ を用いて,

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

とおく. S_0 は定数とする.

$\varphi(x) = S_0 e^x$, $X_t = \mu t + \sigma B_t$ ($u_t \equiv \mu$, $f_t \equiv \sigma$) とすると,
 $\varphi'(x) = \varphi''(x) = S_0 e^x$, $(S_0 \sigma e^{X_t})_t \in \mathcal{L}^2[0, T]$ が示せる.

(X_t は正規分布なので $E[e^{X_t}]$ が計算できる.)

伊藤の公式の例

よって伊藤の公式より

$$\begin{aligned} S_t = \varphi(X_t) &= S_0 + \int_0^t \varphi(X_s)(\mu ds + \sigma dB_s) + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(X_s) \cdot \sigma^2 ds \\ &= S_0 + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t S_s \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) ds. \end{aligned}$$

$S_s > 0$ なので,

$$(S_t)_{t \in [0, T]} \text{ がマルチンゲール} \iff \mu = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

多次元の伊藤の公式

$d, m \in \mathbb{N}$ として, $B = (B_t^i)_{t \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq d}$ を d 次元ブラウン運動, 各 $1 \leq j \leq m$ に対して, X^j を伊藤過程:

$$X_t^j = X_0^j + \int_0^t u_s^j ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_s^{ij} dB_s^i,$$

$$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^m)$$

とする (各 i, j に対し, $\int_0^T |u_t^j| ds < \infty$ a.s., $f^{ij} \in \mathcal{L}^2[0, T]$).

多次元の伊藤の公式

定理 4.10 (伊藤の公式)

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}^m)$, 各 i, j に対して $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(X_t) f_t^{ij})_t \in \mathcal{L}^2[0, T]$ とすると,

$$\begin{aligned} \varphi(X_t) &= \varphi(X_0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(X_s) u_s^j ds + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(X_s) f_s^{ij} dB_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(X_s) f_s^{ij} f_s^{ik} ds. \quad (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

多次元の伊藤の公式の例

例 4.11

$B_t = (B_t^1, B_t^2)$ を 2次元ブラウン運動, $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $X_t^j = B_t^j$ とすると, $f_t^{11} \equiv f_t^{22} \equiv 1$, 他の f_t^{ij} , u_t^j は 0 となり, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = x_1$, $\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x_j)^2} = 0$ ($j = 1, 2$), $(B_t^1)_t, (B_t^2)_t \in \mathcal{L}^2[0, T]$ なので, 伊藤の公式より

$$B_t^1 B_t^2 = \int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t B_s^1 dB_s^2.$$

特に $(B_t^1 B_t^2)_{t \in [0, T]}$ はマルチンゲールになる.