クレジット:
Mathematics and Informatics Center 数理手法VI 2020 荻原哲平

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

数理手法VI

第 1 回

数理手法 IV の概要

1. 離散型確率空間
2. マルチンゲール
   - 停止時刻，任意停止定理
3. 一般の確率空間
   - σ-加法族，測度，積分
4. 一般のマルチンゲール理論
   - 任意停止定理，Doob 分解，Doob の不等式，オプション価格理論

数理手法VIの概要

1. マルチンゲール理論の続き
   - マルチンゲール収束定理，マルチンゲール中心極限定理
2. マルコフ連鎖
   - マルチンゲールとは異なる重要な確率過程のクラス
3. ブラウン運動・確率積分
   - 連続時間の確率過程
4. オプション価格理論
   - 連続時間マルチンゲール理論の金融への応用

参考文献

- 西尾真喜子 (1978).「確率論」，実教出版.
- Durrett, R. (2010). Probability Theory and Examples (4th Edition). Cambridge University Press.
  - 電子ブックは 5th Edition の方が入手しやすい.
- 舟木直久 (2005).「確率微分方程式」，岩波書店.
- シュレーブ S.E. (2012).「ファイナンスのための確率解析 II」，丸善出版.

第 1 章 マルチンゲール理論

1.1 数理手法IVの復習

σ-加法族，可測空間

定義

空でない集合 Ω のベキ集合 $\mathcal{P}(S)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ （つまり $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合をいくつか集めたもの）が Ω 上の σ-加法族であるとは

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば，$A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$
3. $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ ならば，$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

を満たす時をいう.

空でない集合 Ω と Ω 上の σ-加法族 $\mathcal{F}$ のペア $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ.
$\mathcal{G}$ も σ-加法族で $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ なら $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族という.

確率空間

定義

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の写像 $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ が以下の三条件を満たす時確率と呼ぶ.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ が互いに素，すなわち，$i \neq j$ の時 $A_i \cap A_j = \emptyset$ である時

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \text{（可算加法性）}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と呼ぶ．以下確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を固定して考える.

確率空間

命題

$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ とする．

1. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$A_n \subset A_{n+1}$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \quad \text{（確率の連続性）}$$

2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$A_n \supset A_{n+1}$ ならば

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \quad \text{（確率の連続性）}$$

3.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad \text{（可算劣加法性）}$$

確率変数

定義

写像 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率変数 *(random variable, r.v.)* であるとは，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となる時をいう.（$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ はボレル集合族）

部分 σ-加法族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対し，$X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ なら X は $\mathcal{G}$-可測という.

確率変数 X に対して，$\int_\Omega |X(\omega)|P(d\omega) < \infty$ の時，X は可積分であるといい，$X \in L^1$ と書く.

$X \in L^1$ の時,

$$E[X] := \int_\Omega X(\omega)P(d\omega), \quad E[X, A] := E[X1_A]$$

と定める.

積分の収束定理

定理

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を確率変数列とする.

1. $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ $(\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N})$ とすると，

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]. \quad \text{(単調収束定理)}$$

2. $X_n(\omega) \geq 0$ $(\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N})$ とすると，

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n]. \quad \text{(ファトゥの補題)}$$

3. 各 $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が存在し，ある $Y \in L^1$ に対し，$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ $(\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N})$ とする．この時，

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]. \quad \text{(ルベーグの優収束定理)}$$

条件付期待値

命題

$X \in L^1$, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の時，以下を満たす $Y \in L^1$ が存在する．

1. Y は $\mathcal{G}$-可測
2. 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して，$E[X, A] = E[Y, A]$

さらに $Y' \in L^1$ も *1.* と *2.* を満たす時，$Y = Y'$ *a.s.* （つまり $P(Y = Y') = 1$）

上の Y を X の $\mathcal{G}$ の下での条件付期待値といい，$E[X|\mathcal{G}]$ と書く．

マルチンゲール

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ と書く.

定義

1. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ がフィルトレーションとは，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$\mathcal{F}_n$ は部分 σ-加法族で
$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$$
となる時をいう.
2. 確率変数の列 $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を確率過程と呼ぶ.
3. 確率過程 $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ が ($\mathbb{F}$-) マルチンゲールとは，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して以下を満たす時をいう.
   3.1 $X_n \in L^1$
   3.2 X_n は $\mathcal{F}_n$-可測
   3.3 $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s.

劣／優マルチンゲール

- マルチンゲールの定義において，3.3 の代わりに
$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq (\leq) X_n \quad \text{a.s.}$$
が成り立つ時，劣（優）マルチンゲールという．
- 確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ が $\mathbb{F}$ に適合している ($\mathbb{F}$-adapted) とは，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，X_n が $\mathcal{F}_n$-可測となっている時をいう．

停止時刻

以下フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を固定して考える．

定義

1. 写像 $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が ($\mathbb{F}$-) 停止時刻とは，任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ となる時をいう．
2. $$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \ (n \in \mathbb{Z}_+)\}$$
   と定める．$\mathcal{F}_\tau$ は τ で停止するまでに得られる情報を表す．
3. 確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ に対し，$P(\tau < \infty) = 1$ の時，確率変数 X_τ を
   $$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{if } \tau < \infty \\ 0 & \text{if } \tau = \infty \end{cases}$$
   と定める．

任意停止定理

定理

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ をマルチンゲール，τ, ρ を停止時刻である定数 $N \in \mathbb{N}$ に対し，$\rho(\omega) \le \tau(\omega) \le N$ $(\omega \in \Omega)$ とすると，$X_\tau, X_\rho \in L^1$ で

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\rho] = X_\rho \quad \text{a.s.}$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ が劣マルチンゲールの時は

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\rho] \ge X_\rho \quad \text{a.s.}$$

系

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ が劣マルチンゲールで $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a \le \tau(\omega) \le b$ $(\omega \in \Omega)$ なら
$$E[X_a] \le E[X_\tau] \le E[X_b].$$
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ がマルチンゲールである正定数 b に対し，$\tau(\omega) \le b$ $(\omega \in \Omega)$ なら，$E[X_\tau] = E[X_0]$.

マルチンゲール変換

定義

1. 確率過程 $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が可予測であるとは，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して H_n が $\mathcal{F}_{n-1}$-可測となる時をいう．
2. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ と $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を確率過程とし，H が有界，すなわちある正定数 K に対し，

$$|H_n(\omega)| \leq K \quad (\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N})$$

とする．この時マルチンゲール変換 $H \cdot X = ((H \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を $(H \cdot X)_0 = 0$,

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定める．

Doob の不等式

命題

$X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を確率過程，$H = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を有界で可予測な確率過程とする．

1. X がマルチンゲールである時，$H \cdot X$ はマルチンゲール．
2. X が劣（優）マルチンゲールで，$H_n \geq 0$ *a.s.* $(n \in \mathbb{N})$ の時，$H \cdot X$ は劣（優）マルチンゲール．

定理

$X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を劣マルチンゲールとし，$\bar{X}_n = \max_{0 \leq k \leq n} X_k$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ とする．この時，任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ と $\alpha > 0$ に対して，

$$\alpha P(\bar{X}_n \geq \alpha) \leq E[X_n 1_{\{\bar{X}_n \geq \alpha\}}] \leq E[(X_n)^+].$$

