数理手法VI

第 9 回

演習解答例

演習問題

1. S, T を停止時刻とすると，$S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ も停止時刻
2. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を停止時刻の列とすると，

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n, \quad \limsup_{n\to\infty} T_n, \quad \liminf_{n\to\infty} T_n$$

は停止時刻になる．

演習解答例

（解答例）

任意の $t \in \mathbb{R}_+$, $t' \in (0, \infty)$ に対し，

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
$$\{S + T < t'\} = \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t')}(\{S < q\} \cap \{T < t' - q\}) \in \mathcal{F}_{t'}.$$

$$\{\sup_n T_n \leq t\} = \cap_n \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$
$$\{\inf_n T_n < t'\} = \cup_n \{T_n < t'\} \in \mathcal{F}_{t'}.$$

演習解答例

各 n に対し，上の議論より $sup_{k\geq n} T_k$, $\inf_{k\geq n} T_k$ は停止時刻で n に関して単調となるので,

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} T_n < t'\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} T_k < t'\right\}$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sup_{k\geq n} T_k < t'\right\} \in \mathcal{F}_{t'}.$$

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} T_n \leq t\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} T_k \leq t\right\}$$
$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\inf_{k\geq n} T_k \leq t\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

停止時刻に関連する定義

定義 3.17

T を停止時刻とする． $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$ と書く．

1. $$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ (t \in \mathbb{R}_+)\}$$

   と定める．$\mathcal{F}_T$ は σ-加法族で

   $$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty; A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \ (t > 0)\}$$

   となることが示せる．
2. $T(\omega) < \infty$ $(\omega \in \Omega)$ の時，右連続なパスをもつ確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ に対し，確率変数 X_T を $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ で定める．
3. S を停止時刻で，$S(\omega) \leq T(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ を満たすとき，$S \leq T$ と書く．

停止時刻の性質

命題 3.18

1. S, T を停止時刻で $S \leq T$ とすると，$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
2. T を停止時刻とすると，$\mathcal{F}_T = \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{T+\epsilon}$.
3. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を右連続なパスをもつ *adapted* な確率過程，T を有界な停止時刻とすると，X_T は $\mathcal{F}_T$-可測.

停止時刻の性質の証明

Proof.
1. $A \in \mathcal{F}_S$ とすると，任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対し，

$$A \cap \{T \le t\} = (A \cap \{S \le t\}) \cap (\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

$(A \in \mathcal{F}_S$ より $A \cap \{S \le t\} \in \mathcal{F}_t.)$

より $A \in \mathcal{F}_T$.

2. 1. より $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$ なので，$\mathcal{F}_T \subset \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{T+\epsilon}$.
よって逆の包含を示せばよい．$A \in \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{T+\epsilon}$ とすると，$\epsilon = 1/n$ の時，
$A \cap \{T + 1/n \le t\} \in \mathcal{F}_t$. よって

$$A \cap \{T < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}(A \cap \{T \le t - 1/n\}) \in \mathcal{F}_t.$$

ゆえに $A \in \mathcal{F}_T$.

停止時刻の性質の証明

3.

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \le T < \frac{k}{2^n}\}}$$

とおくと，T_n は停止時刻で $T_n(\omega) \searrow T(\omega)$ $(n \to \infty)$.

まず $X_{T_n} : \mathcal{F}_{T_n}$-可測を示す．$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\{X_{T_n} \in A\} \cap \left\{ T_n = \frac{k}{2^n} \right\} = \{X_{\frac{k}{2^n}} \in A\} \cap \left\{ \frac{k-1}{2^n} \le T < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}.$$

よって $t \in \mathbb{R}_+$ に対し，

$$\{X_{T_n} \in A\} \cap \{T_n \le t\} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k/2^n \le t}} \left(\{X_{T_n} \in A\} \cap \left\{ T_n = \frac{k}{2^n} \right\} \right) \in \mathcal{F}_t.$$

停止時刻の性質の証明

ゆえに $\{X_{T_n} \in A\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ となり，X_{T_n} は $\mathcal{F}_{T_n}$-可測となる．

$n \geq m$ とすると，1. より $\mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{T+1/2^n} \subset \mathcal{F}_{T+1/2^m}$ なので，X_{T_n} は $\mathcal{F}_{T+1/2^m}$-可測．

X は右連続なパスをもち，$T_n(\omega) \searrow T(\omega)$ なので，
$X_{T_n}(\omega) \to X_T(\omega)$ $(n \to \infty)$．よって X_T も $\mathcal{F}_{T+1/2^m}$-可測で，$m \in \mathbb{N}$ は任意なので 2. より X_T は $\cap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{T+1/2^m} = \mathcal{F}_T$-可測． □

任意停止定理

定理 3.19 (任意停止定理)
$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を右連続マルチンゲール，S, T を有界な停止時刻で $S \le T$ とする．この時，$X_S, X_T \in L^1$ で

$$E[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.}$$

証明は舟木「確率微分方程式」定理 3.12 を見よ．

- 証明のアイディアとしては，T_n, S_n を前の命題のように定め，X_{T_n}, X_{S_n} に離散時間の任意停止定理を使う．$A \in \mathcal{F}_S$ に対し，$E[X_{T_n}, A] \to E[X_T, A]$ 等を示せばよい．

任意停止定理の例

例 3.20
$B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: ブラウン運動，$a,b\in\mathbb{R}$ が $a<0<b$ を満たすとする．

$$T=\inf\{t\geq 0; B_t=a \text{ or } B_t=b\}$$

と定めると，$T<\infty$ *a.s.* で

$$P(B_T=a)=\frac{b}{b-a},\quad P(B_T=b)=\frac{-a}{b-a}$$

となる．

証明は舟木「確率微分方程式」命題 *3.15* を見よ．

第 4 章 確率積分とオプション価格理論

4.1 確率積分の定義

確率積分

- 確率積分とは，マルチンゲール変換

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})$$

を連続時間に拡張した概念であり，ブラウン運動に関する積分と考えることができる．

- 確率積分はブラウニアン・フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ に対してマルチンゲールになる．

- 逆に $\mathbb{F}$ に関するマルチンゲールは確率積分の形で表現できるというのがマルチンゲール表現定理であり，この定理がオプション価格理論のキーとなる．

直積 σ-加法族と発展的可測

T: 正定数（停止時刻ではない）とし，$B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: ブラウン運動，
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: ブラウニアン・フィルトレーションとする．

定義 4.1

1. $[0, t]$ 上のボレル集合族 $\mathcal{B}([0, t])$ を以下で定める：

$$\mathcal{B}([0, t]) := \{A \cap [0, t]; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

2. 可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ と $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ に対して，直積空間 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の σ-加法族 $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ を

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\{A \times B; A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\})$$

   と定める．$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ は直積 σ-加法族と呼ばれる．

3. 確率過程 $(f_t)_{t\in[0,T]}$ が ($\mathbb{F}$-) 発展的可測であるとは，各 $t \in [0, T]$ に対して，写像 $f : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}, (s, \omega) \mapsto f_s(\omega)$ は $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測となる時をいう．

確率積分における被積分関数

$\mathcal{L}^2[0, T]$ を以下を満たす確率過程 $f = (f_t)_{t\in[0,T]}$ の集合とする．

1. f は発展的可測．
2. $$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \sqrt{E\left[\int_0^T f_t^2 dt\right]} < \infty.$$

- 確率過程 $(f_t)_{t\in[0,T]}$ が adapted で右連続なパスをもつ時，発展的可測になることが知られている．
- $f \in \mathcal{L}^2[0, T]$ に対して，確率積分 $\int_0^T f_t dB_t$ を定義する．

f が階段過程の場合

$n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, g_j: $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測確率変数 $(1 \le j \le n)$ に対し,

$$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} g_j(\omega) 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$$

と書ける場合（この時 f は階段過程であるという）,

$$\int_0^T f_t dB_t := \sum_{j=1}^{n} g_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$$

と定める（マルチンゲール変換の形）.

階段過程の確率積分の性質 1

階段過程の場合の極限として，一般の $(f_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2[0,T]$ に対して定義したい．そのために階段過程の確率積分の性質を 2 つ示す．

補題 4.2

$(f_t)_{t\in[0,T]}$ を階段過程とすると，

$$E\left[\left(\int_0^T f_t dB_t\right)^2\right] = \|(f_t)_{t\in[0,T]}\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

補題の証明

Proof.
$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^n g_j(\omega) 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$ と書くと，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^T f_t dB_t\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{j=1}^n g_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{j,k=1}^n g_j g_k (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^n g_j^2 (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 + 2\sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} g_j g_k (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right].
\end{aligned}
$$

補題の証明

ブラウン運動の定義より $\sigma(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ と独立になり，
$E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] = t_j - t_{j-1}$, $E[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] = 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\int_0^T f_t dB_t\right)^2\right] \\
&= E\Bigg[\sum_{j=1}^n g_j^2 E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{j-1}}] \\
&\qquad + 2\sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} g_j g_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) E[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\Bigg] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^n g_j^2 (t_j - t_{j-1})\right] = E\left[\int_0^T f_t^2 dt\right].
\end{aligned}
$$

□

階段過程の確率積分の性質 2

補題 4.3

$(f_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2[0,T]$ に対して，階段過程の列 $(f_t^{(n)})_{t\in[0,T],n\in\mathbb{N}}$ があって，

$$\lim_{n\to\infty} \|(f_t - f_t^{(n)})_{t\in[0,T]}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0. \tag{1}$$

Proof.

$(f_t)_{t\in[0,T]}$ が連続なパスをもち，ある正定数 M に対し，

$$|f_t(\omega)| \le M \quad (t \in [0,T], \omega \in \Omega)$$

の場合を考える．この時，$t_j = jT/n$,

$$f_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} f_{t_{j-1}} 1_{[t_{j-1},t_j)}(t)$$

とおく．

階段過程の確率積分の性質 2 の証明

すると優収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (f_t - f_t^{(n)})^2 dt\right] = 0.$$

f_t が $|f_t(\omega)| \leq M$ とならない場合は，まず f_t を $(f_t \vee (-M)) \wedge M$ で近似してから階段過程で近似する．詳細や他のケースの証明は舟木「確率微分方程式」補題 4.4 を見よ． □