数理手法VI

第8回

3.2 連続時間マルチンゲールの性質

右連続マルチンゲール

フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を一つ固定する.

離散時間マルチンゲールに対して成り立つ性質の多くは連続時間でも成立する.

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が（劣/優）マルチンゲールで，右連続なパスをもつ時，X を右連続（劣/優）マルチンゲールという.

Doob の不等式

定理 3.10

$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を右連続劣マルチンゲールとし，$\alpha, t > 0$ とする．この時

$$\alpha P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s > \alpha\right) \leq E\left[X_t, \left\{\sup_{0 \leq s \leq t} X_s > \alpha\right\}\right] \leq E[X_t^+].$$

Proof. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(X_{kt/2^n})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ は $(\mathcal{F}_{kt/2^n})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ に関する離散時間劣マルチンゲールなので離散時間の Doob の不等式より，
$\alpha_m = \alpha + 1/m$ に対して，

$$\alpha_m P\left(\max_{0 \leq k \leq 2^n} X_{kt/2^n} \geq \alpha_m\right) \leq E\left[X_t, \left\{\max_{0 \leq k \leq 2^n} X_{kt/2^n} \geq \alpha_m\right\}\right].$$

Doob の不等式

$m \to \infty$ とすると，確率の連続性（数理手法 IV 命題 4.21）と優収束定理より，

$$\alpha P\left(\sup_{0 \le k \le 2^n} X_{kt/2^n} > \alpha \right) \le E\left[X_t, \left\{ \max_{0 \le k \le 2^n} X_{kt/2^n} > \alpha \right\} \right].$$

X の右連続性より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \max_{0 \le k \le 2^n} X_{kt/2^n} > \alpha \right\} = \left\{ \sup_{0 \le s \le t} X_s > \alpha \right\}.$$

Doob の不等式

$n \to \infty$ とすると，再び確率の連続性と優収束定理より，

$$\alpha P\left(\sup_{0 \le s \le t} X_s > \alpha \right) \le E\left[X_t, \left\{ \sup_{0 \le s \le t} X_s > \alpha \right\} \right].$$

□

マルチンゲール収束定理

定理 3.11

$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を右連続劣マルチンゲールとし，$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} E[X_t^+] < \infty$ とする．この時ある $X_\infty \in L^1$ があって，

$$X_t \to X_\infty \quad \text{a.s.} \quad (t \to \infty)$$

Proof. $a < b$ として，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(X_{kt/2^n})_{k=0}^{2^n}$ が $[a, b]$ を上向きに横断する回数を $U_{t,n}[a, b]$ とおくと上向き横断不等式（命題 1.1）より，

$$E[U_{t,n}[a, b]] \leq \frac{E[(X_t - a)^+]}{b - a} \leq \frac{E[X_t^+] + |a|}{b - a}.$$

マルチンゲール収束定理

$U_{t,n}$ は n に関して非減少なので,

$$U_{t,n}[a,b] \nearrow U_t[a,b] := \sup_n U_{n,t}[a,b].$$

よってファトゥの補題より,

$$E[U_t[a,b]] \leq \frac{E[X_t^+] + |a|}{b-a}.$$

U_{2^m} は m に関して非減少なので,

$$U_{2^m}[a,b] \nearrow U_\infty[a,b] := \sup_m U_{2^m}[a,b].$$

マルチンゲール収束定理

再びファトゥの補題より

$$E[U_\infty[a,b]] \le \liminf_{m\to\infty} \frac{E[X_{2^m}^+] + |a|}{b-a} < \infty.$$

よって $U_\infty[a,b] < \infty$ a.s.

ゆえに $\mathbb{Q}_2 := \{m/2^n; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ とおき，

$$F_{a,b} = \left\{\omega; \liminf_{t\to\infty, t\in\mathbb{Q}_2} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t\to\infty, t\in\mathbb{Q}_2} X_t(\omega)\right\}$$

とおくと，任意の $a < b$ に対して

$$P(F_{a,b}) = 0.$$

マルチンゲール収束定理

よってあとは離散時間の場合と同様にして，ある $X_\infty \in L^1$ があって

$$\lim_{t\to\infty, t\in\mathbb{Q}_2} X_t = X_\infty \quad \text{a.s.}$$

するとパスの右連続性より，

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty \quad \text{a.s.}$$

$\square$

（もし $\omega \in \Omega$ に対して，$X_t(\omega)$ が $X_\infty(\omega)$ に収束しないとすると，ある $\epsilon > 0$ と部分列 $(t_k)_{k=1}^\infty$ で $t_k \to \infty$ となるものがあって，
$|X_{t_k}(\omega) - X_\infty(\omega)| \geq \epsilon$.
パスの右連続性から，各 k に対して，$t_k < t'_k$ となる $t'_k \in \mathbb{Q}_2$ を十分近くとれば，$|X_{t_k}(\omega) - X_{t'_k}(\omega)| < \epsilon/2$ とできる．
すると任意の k に対して，$|X_{t'_k}(\omega) - X_\infty(\omega)| \geq \epsilon/2$ となり，
$t \to \infty, t \in \mathbb{Q}_2$ の時も $X_t(\omega)$ は $X_\infty(\omega)$ に収束しないことになる．）

完備確率空間

次に停止時刻と任意停止定理を考える.

定義 3.12

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において, $A \in \mathcal{F}, P(A) = 0$ かつ $B \subset A$ なら $B \in \mathcal{F}$ となる時, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備であるという.

以下, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備であるとして議論を進める.

- 以下の議論を厳密に扱う上では確率空間の完備性が必要になるが, あまり詳細は触れない.

usual condition

定義 3.13

1. フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が右連続：$\mathcal{F}_t = \cap_{u>t}\mathcal{F}_u$ かつ

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F}; P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$$

を満たす時，*usual condition* を満たすと言う．

2. ブラウン運動 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ に対して，

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\sigma(B_s; s \le t) \cup \mathcal{N})$$

とおくと，$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は *usual condition* を満たし，$(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-マルチンゲールになることが示される．$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をブラウニアン・フィルトレーションと呼ぶことにする．

停止時刻

以下，usual condition を満たすフィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ を考える．

定義 3.14

写像 $T : \Omega \to [0, \infty]$ が，各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して，$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ を満たす時，*(*$\mathbb{F}$*-)* 停止時刻という．さらにある $M > 0$ に対し，
$T(\omega) \leq M$ $(\omega \in \Omega)$ を満たす時，有界な停止時刻という．

停止時刻の性質

命題 3.15

1. $T : \Omega \to [0, \infty]$ を写像とすると，
   T: 停止時刻 $\iff$ 任意の $t \in (0, \infty)$ に対し，$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$

2. S, T を停止時刻とすると，$S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ も停止時刻

3. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を停止時刻の列とすると，

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n, \quad \limsup_{n \to \infty} T_n, \quad \liminf_{n \to \infty} T_n$$

   は停止時刻になる．

停止時刻の性質の証明

Proof.

1. のみ示す．他は演習とする．

$(\Longrightarrow)$　$t \in (0, \infty)$ に対し，

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T \le t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

$(\Longleftarrow)$　$0 \le t < u$ に対し，$u > t + 1/N$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとると，

$$\{T \le t\} = \bigcap \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_u.$$

よって $\mathbb{F}$ の右連続性より

$$\{T \le t\} \in \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t.$$

□

到達時刻

停止時刻の例として，次の到達時刻がある．

確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $\mathbb{F}$-adapted かつ右連続なパスをもつとする．
$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，

$$T_A := \inf\{t \in \mathbb{R}_+; X_t \in A\}$$

を X の A への到達時刻という．

命題 3.16

X は $\mathbb{F}$-*adapted* かつ右連続なパスをもつとし，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする．

1. A が開集合なら，T_A は停止時刻.
2. A が閉集合かつ X が連続なパスをもつなら T_A は停止時刻.

到達時刻の性質

Proof.

1.

$t \in (0, \infty)$, $T_A(\omega) < t$ の時，ある $r \in \mathbb{R}$, $r < t$ があって，$X_r(\omega) \in A$ となる．すると，A は開集合で X は右連続なパスをもつので，ある $q \in \mathbb{Q}$, $q < t$ があって，$X_q(\omega) \in A$.

よって，

$$\{T_A < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q < t} \{X_q \in A\} \in \mathcal{F}_t.$$

(X_q は $\mathcal{F}_q$-可測, $\mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_t$, $\mathbb{Q}$ は可算．)

到達時刻の性質

2.

$$A_m := \left\{ x \in \mathbb{R}; \inf_{y \in A} |x - y| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

とおく.（A を $1/m$ だけ広げたもの）

$t \in [0, \infty)$, $T_A(\omega) \leq t$ の時，A は閉集合で X は連続なパスをもつので，
ある $s \in [0, t]$ があって，$X_s \in A$.
(T_A の定義より，数列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $X_{s_n} \in A$ かつ $s_n \to s$ となるものがとれる．この時 $X_{s_n} \to X_s$ で A は閉集合より $X_s \in A$.)

この時，$(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \cap [0, t]$ で $q_n \to s$ となるものをとれば，
$X_{q_n} \to X_s \in A$ なので，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，ある n があって，
$X_{q_n} \in A_m$.

到達時刻の性質

よって

$$\{T_A \le t\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \{X_q \in A_m\}.$$

逆向きの包含は，ω が右辺に含まれる時，$X_q(\omega) \in A_m$ となる q を q_m とすれば，$(q_m)_m \subset [0,t]$ より，ある部分列 $(q_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ と $s' \in [0,t]$ があって，$q_{m_k} \to s'$ となる．この時，$X_{s'} \in \cap_{m\in\mathbb{N}} A_m = A$ となることからわかる．

ゆえに

$$\{T_A \le t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \{X_q \in A_m\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

