クレジット：
Mathematics and Informatics Center 数理手法VI 2020 荻原哲平

数理手法VI

第 7 回

第３章 ブラウン運動と連続時間マルチンゲール

連続時間の確率過程

以下の章では連続時間の確率過程 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \Rightarrow (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を考えていく.

連続時間モデルを考えるモチベーションとしては以下がある.

1. より強い結果が成り立つ.
   - 反射原理
   - マルチンゲール表現定理
     離散時間：$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: i.i.d. で $\{-1,1\}$ に値をとるような確率モデルに対して成立

     連続時間：ブラウン運動が生成する確率モデルに対して成立

連続時間の確率過程

2. より柔軟にモデルを作れる.
   - 物理現象：微分方程式にランダムなノイズ　→確率微分方程式
   - ランダムな観測時刻
     $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ と観測時刻 $(t_k)_{k=1}^n$ のモデルを別々に作れるため，ランダムな $(t_k)_{k=1}^n$ のモデルを自由に作れる.
     →日内の株価データではこのようなモデリングが使われる.
     （株の取引時刻は規則的ではなく，確率的なモデルが自然）

3. 離散時間モデルの極限として現れる.
   - i.i.d. r.v.s による株価モデルで観測頻度が大きくなる極限
   - i.i.d. r.v.s の経験分布関数の推定誤差の極限

3.1 ブラウン運動とマルチンゲール，マルコフ過程

ブラウン運動の定義

ブラウン運動は i.i.d. r.v.s の和を連続時間に拡張したような概念.
具体的には以下のように定義される.

- （連続時間の）確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ とは，各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して，X_t が確率変数となる時をいう.
- 確率過程 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ に対して，$\omega \in \Omega$ を固定すると，関数 $t \mapsto X_t(\omega)$ が定義される．これを X の（サンプル）パスという.
- 全ての $\omega \in \Omega$ に対して，$t \mapsto X_t(\omega)$ が（右）連続関数となる時，X は（右）連続なパスをもつという.

ブラウン運動の定義

定義 3.1 (ブラウン運動)

確率過程 $B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ がブラウン運動（*Brownian motion, BM*）とは，以下の 4 条件を満たす時をいう.

1. $B_0 = 0$ *a.s.*
2. B は連続なパスを持つ
3. （独立増分性） 任意の $n\in\mathbb{N}$ と $0<t_1<\cdots<t_n$ に対して，$B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ は独立.
4. 任意の $t\geq 0$ と $h>0$ に対して，$B_{t+h}-B_t \sim N(0,h)$.

ブラウン運動の定義

上の４条件を満たす確率過程の存在は明らかではない．
特に非可算個の確率変数でいくつかの条件を満たすようなものを見つけるのは一般に容易ではないが，以下の定理が成り立つ．

定理 3.2 (Wiener の定理)

ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上にブラウン運動 $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が存在する．

証明は舟木「確率微分方程式」A.2 節をみよ．

連続時間マルチンゲール

ブラウン運動は連続時間のマルチンゲールかつマルコフ過程となる．
まずは連続時間のマルチンゲールを定義する．

$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の増大列 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をフィルトレーションと呼ぶ：
任意の $0 \le s < t$ に対して，$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

定義 3.3

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をフィルトレーション，$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を確率過程とする．

1. X が *($\mathbb{F}$-)adapted* とは，各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して，X_t が $\mathcal{F}_t$-可測の時をいう．
2. X が *($\mathbb{F}$-)* マルチンゲールとは，以下の 3 条件を満たす時をいう．
   - 2.1 X は *($\mathbb{F}$-)adapted.*
   - 2.2 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し，$X_t \in L^1$.
   - 2.3 $0 \le s < t$ の時，$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *a.s.*

連続時間マルチンゲール

2.3 式の代わりに，$0 \le s < t$ の時　$E[X_t|\mathcal{F}_s] \ge (\le) X_s$ a.s. を満たすなら，X を劣（優）マルチンゲールという.

$B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$: BM に対して，

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : s \in [0, t]) := \sigma(\cup_{s \in [0,t]} \sigma(B_s))$$

と定める.（ブラウン運動が生成するフィルトレーション）

命題 3.4

B は $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in \mathbb{R}_+}$-マルチンゲールになる.

ブラウン運動のマルチンゲール性

Proof. 各 $t > 0$ に対して，$B_t \sim N(0,t)$ より，$B_t \in L^1$. B_t が $\mathcal{F}_t^B$-可測であることもわかる.
よってあとは $t > s$, $A \in \mathcal{F}_s^B$ に対して,

$$E[B_t, A] = E[B_s, A] \tag{1}$$

を示せばよい.

まず

$$\mathcal{A} := \{B_{s_1}^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap B_{s_n}^{-1}(A_n); n \in \mathbb{N}, 0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq s, \\ A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

に対して $A \in \mathcal{A}$ となる場合を考える.

ブラウン運動のマルチンゲール性

$A = B_{s_1}^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap B_{s_n}^{-1}(A_n)$ とすると，ブラウン運動の定義より $\sigma(B_t - B_s)$ と $\sigma(B_{s_n} - B_{s_{n-1}}, \cdots, B_{s_2} - B_{s_1}, B_{s_1}) = \sigma(B_{s_n}, \cdots, B_{s_1})$ は独立で，$A \in \sigma(B_{s_n}, \cdots, B_{s_1})$ なので，

$$
\begin{aligned}
E[B_t, A] &= E[B_t - B_s, A] + E[B_s, A] = E[B_t - B_s]P(A) + E[B_s, A] \\
&= E[B_s, A].
\end{aligned}
$$

$(B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ より $E[B_t - B_s] = 0)$

よって $A \in \mathcal{A}$ の時 (1) が成立.

ブラウン運動のマルチンゲール性

$\mathcal{A}$ は π-システムで,

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F}_s^B ; E[B_t, A] = E[B_s, A]\}$$

は λ-システム. $((A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ の時, $B_t, B_s \in L^1$ なので,
優収束定理より $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.)

$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ なので, π-λ 定理より $\mathcal{F}_s^B = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}$.
$(\sigma(B_u) \subset \mathcal{A}$ $(\forall u)$ より $\cup_{u \in [0,s]} \sigma(B_u) \subset \mathcal{A}$. $\therefore \sigma(\cup_{u \in [0,s]} \sigma(B_u)) \subset \sigma(\mathcal{A}))$
よって $A \in \mathcal{F}_s^B$ に対して (1) が成立. $\square$

ブラウン運動のマルコフ性

定義 3.5

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ をフィルトレーション，$X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を確率過程とする．
この時，任意の $0 \leq s < t$ と $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，

$$P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s) \quad \text{a.s.}$$

となるなら，X をマルコフ過程という．

※ 正則条件付確率というものを考えると，$P(X_t \in \cdot|X_s)$ が確率となるようにでき，右辺は推移確率の形になる．（ただし，s, t に依存）

命題 3.6

ブラウン運動はマルコフ過程になる．

ブラウン運動のマルコフ性

Proof. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とし，$\mathcal{A}$ を命題 3.4 のものとすると，

$$C = B_{s_1}^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap B_{s_n}^{-1}(A_n)$$

に対して，命題 2.6 より

$$\begin{aligned} E[1_{\{B_t \in A\}}, C] &= E[1_{\{B_t - B_s + B_s \in A\}} 1_C] \\ &= E[E[1_{\{B_t - B_s + B_s \in A\}} | B_{s_1}, \cdots, B_{s_n}, B_s] 1_C] \\ &= E[P(B_t - B_s + x \in A)|_{x = B_s}, C]. \end{aligned}$$

ブラウン運動のマルコフ性

$$\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{F}_s^B | E[1_{\{B_t \in A\}}, C] = E[P(B_t - B_s + x \in A)|_{x=B_s}, C]\}$$

とおくと，$\mathcal{L}$ は λ-システムで $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ より，$\mathcal{F}_s^B = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}$.
ゆえに

$$P(B_t \in A | \mathcal{F}_s^B) = P(B_t - B_s + x \in A)|_{x=B_s}. \quad \text{a.s.}$$

両辺の $E[\ \ |B_s]$ をとれば，tower property より

$$P(B_t \in A | B_s) = P(B_t - B_s + x \in A)|_{x=B_s} = P(B_t \in A | \mathcal{F}_s^B). \quad \text{a.s.}$$

$\square$

反射原理

さらにマルコフ性，強マルコフ性等が成り立ち，反射原理が示される．

定理 3.7 (反射原理)

$(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: *BM*, $t > 0$, $a \geq 0$ とすると，

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} B_s \geq a\right) = 2P(B_t \geq a) = 2\int_a^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dx.$$

証明は舟木「確率微分方程式」例 3.19 を見よ．

定義 3.8

$d \geq 2$ として，独立な d 個のブラウン運動 $(B_{i,t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(1 \leq i \leq d)$ に対して，$B_t = (B_{1,t}, \cdots, B_{d,t})$ を d 次元ブラウン運動と呼ぶ．

ブラック・ショールズ・モデル

例 3.9

時刻 t の株価を X_t とおき，$\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\log X_t = \log X_0 + \mu t + \sigma B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

で株価をモデリングする．ただし，$(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は BM.

フィッシャー・ブラック，マイロン・ショールズ，ロバート・マートンらはこのモデルを用いてヨーロッパ・オプションの価格公式を導出した．