クレジット：

Mathematics and Informatics Center 数理手法VI 2020 荻原哲平

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

数理手法VI

第 6 回

演習問題の解答

演習問題

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると，

$$\tilde{\nu}_{\mu,m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\nu}_{\delta_z,m}(A) d\tilde{\nu}_{\mu,n}(z)$$

となることを証明せよ．

演習問題の解答

（解答例）
f が非負可測なら

$$E[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(z)\tilde{\nu}_{\mu,n}(dz).$$

よって，マルコフ性より

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{\mu,m+n}(A) &= E[1_A(X_{m+n})] = E[E[1_A(X_{m+n})|\mathcal{F}_n]] \\ &= E[\tilde{\nu}_{\delta_z,m}(A)|_{z=X_n}] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\nu}_{\delta_z,m}(A) d\tilde{\nu}_{\mu,n}(z).\end{aligned}$$

強マルコフ性

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$ とする。

定理 2.16 (強マルコフ性)

$n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, 有界可測，$N$ を有界な $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$-停止時刻とすると，

$$E[f(X_N, X_{N+1}, \cdots, X_{N+n})|\mathcal{F}_N] = \int f(y_0, \cdots, y_n) d\nu_x(y)\Big|_{x=X_N}.$$

- マルコフ性が停止時刻に対しても成り立つということ．

強マルコフ性の証明

Proof. $L \in \mathbb{N}$ に対して $N(\omega) \leq L$ $(\omega \in \Omega)$ とすると，任意の $A \in \mathcal{F}_N$ に対して，

$$E[f(X_N, X_{N+1}, \cdots, X_{N+n}), A] = \sum_{l=0}^{L} E[f(X_l, X_{l+1}, \cdots, X_{l+n}), A \cap \{N = l\}].$$

$A \cap \{N = l\} \in \mathcal{F}_l$ なのでマルコフ性より

$$\begin{aligned} &E[f(X_N, X_{N+1}, \cdots, X_{N+n}), A] \\ &= \sum_{l=0}^{L} E\left[\int f(y_0, \cdots, y_n) d\nu_x(y)\Big|_{x=X_l}, A \cap \{N = l\}\right] \\ &= E\left[\int f(y_0, \cdots, y_n) d\nu_x(y)\Big|_{x=X_N}, A\right]. \end{aligned}$$

□

反射原理

強マルコフ性を使うと以下の反射原理を示せる．

$(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の確率 μ が $x \in \mathbb{R}^k$ に関して対称とは，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ に対して，

$$\varphi_x(A) := \{y | 2x - y \in A\}$$

が

$$\mu(\varphi_x(A)) = \mu(A)$$

を満たす時をいう．

※ $\varphi_x(A)$ は A を x を中心に反転させたもの．

反射原理

定理 2.17 (反射原理)

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: *i.i.d. r.v.s* で，Y_1 の分布は原点に関して対称として，$X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく．この時 $a > 0$ に対して，

$$P\left(\max_{0\le k\le n} X_k > a\right) \le 2P(X_n > a).$$

- Doob の不等式のように $X_0, \cdots, X_n$ の max の確率を X_n の情報で評価．$Y_1 \in L^1$ は必要ない．

反射原理の証明

Proof. 停止時刻 N を

$$N = \min\{k | 1 \le k \le n, X_k > a\} \wedge (n+1)$$

とおく（$\min \emptyset = \infty$）.

$\{X_n > a\} \subset \{N \le n\}$ なので,

$$\{X_n > a\} = \cup_{k=1}^{n} (\{N = k\} \cap \{X_{n-k+N} > a\})$$

と書ける.

反射原理の証明

よって強マルコフ性より,

$$
\begin{aligned}
E[1_{\{X_n > a\}} | \mathcal{F}_N] &= \sum_{k=0}^{n} E[1_{\{X_{n-k+N} > a\}} | \mathcal{F}_N] 1_{\{N=k\}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int 1_{\{y_{n-k} > a\}} d\nu_x(y) \Big|_{x=X_N} 1_{\{N=k\}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \int 1_{\{y_{n-k} - x \geq 0\}} d\nu_x(y) \Big|_{x=X_N} 1_{\{N=k\}}. \\
&(\because \ X_N > a \text{ on } \{N \leq n\})
\end{aligned}
$$

反射原理の証明

Y_1 の分布が原点対称なので，ν_x は x に関して対称となり，

$$\int 1_{\{y_{n-k}-x\geq 0\}} d\nu_x = \frac{1}{2}\int (1_{\{y_{n-k}-x\geq 0\}} + 1_{\{y_{n-k}-x\leq 0\}}) d\nu_x \geq \frac{1}{2}.$$

よって，

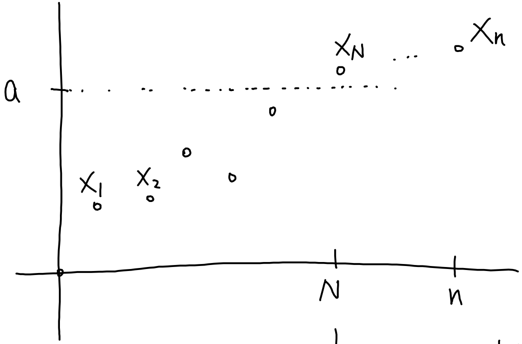
$$E[1_{\{X_n>a\}}|\mathcal{F}_N] \geq \frac{1}{2} 1_{\{N\leq n\}}.$$

両辺期待値をとると，

$$P(X_n > a) \geq \frac{1}{2} P(N \leq n) = \frac{1}{2} P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k > a\right).$$

□

反射原理の証明



ここから新しいマルコフ連鎖を考えると対称性から

$$P(X_n - X_N > 0) = P(X_n - X_N < 0)$$
$$\fallingdotseq \frac{1}{2}$$

$X_n - X_N > 0$ の時 $X_n > a$.

単純ランダムウォークの反射原理

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: i.i.d. r.v.s で，$P(Y_1=\pm1)=1/2$ として，$X_0=0$, $X_n=\sum_{k=1}^n Y_k$ $(n\in\mathbb{N})$ とおく.
この時 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を単純ランダムウォークと呼ぶ.

系 2.18

単純ランダムウォーク $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ と $a,n\in\mathbb{N}$ に対して，$a+n$ が奇数なら

$$P\left(\max_{0\le k\le n} X_k\ge a\right)=2P(X_n\ge a).$$

Proof.

反射原理の証明において $X_N=a$, $P(X_n-a>0)=1/2$ となるので等式が成立.（X_n の偶奇は n の偶奇と同じなので，a の偶奇とは異なるから $X_n-a=0$ とならない） □

連続時間の反射原理

- i.i.d. r.v.s の和を連続時間上の連続関数へ拡張したブラウン運動 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を次章で扱う．($\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$)
($t \mapsto B_t$ は連続関数になる)

- 上の図において，$B_N = a$, $P(B_n - B_N > 0) = 1/2$ となり，

$$P\left(\max_{0\leq t\leq n} B_t > a\right) = 2P(B_n > a)$$

と 等式が成立する.

- B_n は正規分布なので $\max_{0\leq t\leq n} B_t$ の分布が正確に計算できることになる.

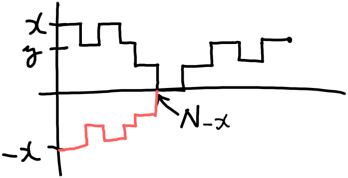
投票定理

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を単純ランダムウォーク, $N_a = \min\{k \in \mathbb{Z}_+; X_k = a\}$ とする.

補題 2.19

$x, y \in \mathbb{N}$ とすると,

$$P(x + X_n = y, N_{-x} < n) = P(-x + X_n = y).$$



投票定理

定理 2.20 (投票定理)

候補 A，B の二者の選挙において，最終的に A が α 票，B が β 票得たとし，$\beta < \alpha$ とする．この時，途中経過で A の得票数が B のものを常に上回っていた確率は $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ である．

Proof. $n = \alpha + \beta$（総投票数），$(X_m)_{m \in \mathbb{Z}_+}$: 単純ランダムウォークとする．$0 \leq l \leq n$ に対して，X_l が時点 l での (A の得票数) - (B の得票数) を表していると思えば，最終的な A,B の得票数がそれぞれ α, β になる確率は，

$$P(X_n = \alpha - \beta)$$

となる．

投票定理の証明

さらに，A の得票数が B の得票数を常に上回っている確率は

$$P(X_1 = 1) \times P(1 + X_{n-1} = \alpha - \beta, N_{-1} > n - 1)$$

で表現される．

よって

$$\frac{(1/2)P(1 + X_{n-1} = \alpha - \beta, N_{-1} > n - 1)}{P(X_n = \alpha - \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

を示せばよい．

（単純ランダムウォークでモデル化すると，各投票者が A,B に投票する確率が 1/2 であることを仮定することになるが，ランダムウォークの確率は組み合わせの数え上げに対応しているので，実はそのような仮定は必要ないことがわかる．）

投票定理の証明

Lemma 2.19 より

$$
\begin{aligned}
&P(1+X_{n-1}=\alpha-\beta, N_{-1}>n-1) \\
&\quad = P(1+X_{n-1}=\alpha-\beta) - P(1+X_{n-1}=\alpha-\beta, N_{-1}<n-1) \\
&\quad = P(1+X_{n-1}=\alpha-\beta) - P(-1+X_{n-1}=\alpha-\beta).
\end{aligned}
$$

$X_{n-1}=\alpha-\beta-1$ となるには，+1 が $\alpha-1$ 回，-1 が β 回，
$X_{n-1}=\alpha-\beta+1$ となるには，+1 が α 回，-1 が $\beta-1$ 回
となる必要がある．($n=\alpha+\beta$ であった)

投票定理の証明

よって

$$\begin{aligned} & P(1+X_{n-1}=\alpha-\beta, N_{-1}>n-1) \\ &= \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\beta!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!(\beta-1)!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\times 2P(X_n=\alpha-\beta). \end{aligned}$$

□

マルコフ連鎖のその他の話題

その他の話題

- 極限分布 (Sections 5.3–5.6 in Durrett 5th ed)
  マルコフ連鎖の分布収束のための十分条件の話題

- 最適停止問題 (西尾 8.4 節)
  マルコフ連鎖に従うランダムな事象の下での利益の最大化

有限空間のマルコフ連鎖は推移確率行列を求めれば，各状態の確率が計算でき，極限における分布も計算できるため，ランダムなネットワークの時間発展の分析や企業の格付推移等へ応用される．

マルチンゲールと比べて，マルコフ連鎖は（条件付）期待値の条件が必要ないので，期待値が存在しない，または計算しづらい時にも使える．
（ex. 株式の売買注文の到着を整数値確率過程でモデリング)

