数理手法VI

第 5 回

演習問題の解答

演習問題

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: *i.i.d.* 確率変数列，$X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると，$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ がマルコフ連鎖になることを命題 *2.6* を使って証明せよ．

（解答例）

命題 2.6 より，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$p(x, A) := E[1_A(x + Z_1)]$$

は可測で，

$$P(X_{k+1} \in A | X_0, \cdots, X_k) = P(X_k + Z_{k+1} \in A | X_0, \cdots, X_k) = p(X_k, A) \quad \text{a.s.}$$

$p(x, A)$ の定義から，$p(x, \cdot)$ が確率となり，p は推移確率なので，$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ はマルコフ連鎖．

2.2 有限次元分布とマルコフ連鎖の構成

マルコフ連鎖の有限次元分布

命題 2.9

$X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を初期分布 μ，推移確率 p のマルコフ連鎖とすると，$A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} &P(X_0 \in A_0, \cdots, X_n \in A_n) \\ &\quad = \int_{A_0} \cdots \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n)p(x_{n-2}, dx_{n-1}) \cdots p(x_0, dx_1)\mu(dx_0) \end{aligned} \tag{1}$$

※ $(X_0, \cdots, X_n)$ の分布を X の有限次元分布という．
※命題 2.8 より，$x_{n-1} \mapsto \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n)$ は可測なので，$p(x_{n-2}, dx_{n-1})$ による積分が定義できる．同様に右辺が定義される．
※つまり，マルコフ連鎖の有限次元分布は p と μ の積分で簡単に書けるということ．

マルコフ連鎖の有限次元分布

Proof. マルコフ連鎖の定義と条件付期待値の性質より

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 \in A_0, \cdots, X_n \in A_n) \\
&\quad = E[1_{A_n}(X_n) 1_{A_0 \times \cdots \times A_{n-1}}(X_0, \cdots, X_{n-1})] \\
&\quad = E[P(X_n \in A_n | X_0, \cdots, X_{n-1}) 1_{A_0 \times \cdots \times A_{n-1}}(X_0, \cdots, X_{n-1})] \\
&\quad = E\left[\int_{A_n} p(X_{n-1}, dx_n) 1_{A_0 \times \cdots \times A_{n-1}}(X_0, \cdots, X_{n-1}) \right] \\
&\quad = E\left[E\left[\int_{A_n} p(X_{n-1}, dx_n) 1_{A_{n-1}}(X_{n-1}) | X_0, \cdots, X_{n-2} \right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times 1_{A_0 \times \cdots \times A_{n-2}}(X_0, \cdots, X_{n-2}) \right].
\end{aligned}
$$

マルコフ連鎖の有限次元分布

命題 2.8 より， $x_{n-1} \mapsto \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n) 1_{A_{n-1}}(x_{n-1})$ は可測で，

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 \in A_0, \cdots, X_n \in A_n) \\
&\quad = E\left[\int_{A_{n-1}} \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n) p(X_{n-2}, dx_{n-1}) 1_{A_0 \times \cdots \times A_{n-2}}(X_0, \cdots, X_{n-2}) \right].
\end{aligned}
$$

以下繰り返し命題 2.8 を適用すればよい． $\square$

マルコフ連鎖の構成

逆に初期分布 μ と推移確率 p が与えられた時に $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$ 上の確率 $\nu_\mu = \nu_{\mu,p,n}$ を

$$\nu_\mu(A) = \int \cdots \int 1_A(x_0, \cdots, x_n) p(x_{n-1}, dx_n) \cdots p(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

で定めて，確率空間 $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}), \nu_\mu)$ 上の確率変数 X_k を

$$X_k(\omega) = \omega_k \quad (\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1})$$

と定めると，$(X_k)_{k=0}^n$ は (1) 式を満たす．この $(X_k)_{k=0}^n$ を n を変えてつなげると，$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を作ることができ，以下を満たす．

マルコフ連鎖の構成

定理 2.10

任意の初期分布 μ と推移確率 p に対して，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のマルコフ連鎖 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ があって，(1) 式をみたす.

証明は西尾 8.2 節定理 1 をみよ.

有限空間のマルコフ連鎖

例 2.11 (有限空間のマルコフ連鎖)

$N \in \mathbb{N}$ に対して，$\{1, 2, \cdots, N\}$ のみに値をとるマルコフ連鎖 $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を考える．$(p_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を，$0 \le p_{ij} \le 1$ かつ $\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1$ を満たす実数として，X の推移確率が

$$p(i, A) = \sum_{j \in A} p_{ij} \quad (1 \le i \le N, A \subset \{1, 2, \cdots, N\})$$

をみたすとする．定理 *2.10* よりこのようなマルコフ連鎖 X の存在がわかる．

有限空間のマルコフ連鎖

- $\{1, \cdots, N\}$ を企業の格付（倒産しやすさを表す指標）として，ある企業の毎年の格付推移を上の X でモデル化することができる．
- 過去データから p_{ij} を推定すれば，命題 2.9 から将来どの格付に属するかの確率が計算できる．

2.3 マルコフ性，強マルコフ性と反射原理

π-λ 定理

この節を通じて，$X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は初期分布 μ，推移確率 p のマルコフ連鎖とする．

まず確率過程の性質を示す上で役に立つ π-λ 定理を紹介する．

π-λ 定理

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: 部分集合の族が π-システムであるとは,

$$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

をみたす時をいう.

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ が λ-システムであるとは,

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B \Longrightarrow B \backslash A \in \mathcal{L}$.
3. $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

をみたす時をいう.

π-λ 定理

定理 2.12 (π-λ 定理)
$\mathcal{A}$ を π-システム，$\mathcal{L}$ を λ-システムで $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ とする．この時 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}$.

証明は Durrett 5th ed. の Theorem 2.1.6 を見よ．

- $\mathcal{L}$ が σ-加法族なら明らかだが，λ-システムでも成り立つことで利便性があがる．
- ある集合族が σ-加法族であることを示すのが難しくても λ-システムであることを示すのは比較的すぐできることがよくある．

デルタ関数

ν_μ はマルコフ連鎖 $(X_0, \cdots, X_n)$ の分布であった．

$x \in \mathbb{R}$ に対して，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率 δ_x を

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

と定める．δ_x はデルタ関数と呼ばれる．
この時 ν_{δ_x} を ν_x と省略して書く．

マルコフ性

定理 2.13 (マルコフ性)

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$: マルコフ連鎖，$k\in\mathbb{N}$, $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$, 有界可測とすると，

$$E[f(X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+n})|X_0, \cdots, X_k] = \int f(y_0, \cdots, y_n)d\nu_x(y)\Big|_{x=X_k} \qquad \text{a.s.}$$

$(y=(y_0, \cdots, y_n))$

マルコフ性の証明

Proof.
$\mathcal{F}_l = \sigma(X_0, \cdots, X_l)$ と書く．
まず，ある $A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，$f(y) = 1_{A_0 \times \cdots \times A_n}(y)$ と書ける場合を考える．この時 tower property と命題 2.8 より

$$\begin{aligned}
&E[f(X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+n})|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = E[E[f(X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+n})|\mathcal{F}_{k+n-1}]|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = E[1_{A_0}(X_k) \cdots 1_{A_{n-1}}(X_{k+n-1}) E[1_{A_n}(X_{k+n})|\mathcal{F}_{k+n-1}]|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = E[1_{A_0}(X_k) \cdots 1_{A_{n-1}}(X_{k+n-1}) p(X_{k+n-1}, A_n)|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = E[1_{A_0}(X_k) \cdots 1_{A_{n-2}}(X_{k+n-2}) E[1_{A_{n-1}}(X_{k+n-1}) p(X_{k+n-1}, A_n)|\mathcal{F}_{k+n-2}]|\mathcal{F}_k].
\end{aligned}$$

マルコフ性の証明

繰り返し命題 2.8 を適用して，

$$
\begin{aligned}
&E[f(X_k, X_{k+1}, \cdots, X_{k+n})|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = E[\nu_x(A_0 \times \cdots \times A_n)|_{x=X_k}|\mathcal{F}_k] = \nu_x(A_0 \times \cdots \times A_n)|_{x=X_k}
\end{aligned}
$$

となり成立する．

次に $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して，$f = 1_A$ と書ける場合を考える．

$$
\mathcal{A} := \{A_0 \times \cdots \times A_n | A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}
$$

とおくと，$\mathcal{A}$ は π-システムになる．

マルコフ性の証明

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) | E[1_A(X_k, \cdots, X_{k+n}) | \mathcal{F}_k] = \nu_x(A)|_{x=X_k} \quad \text{a.s.}\}$$

とおくと，確率や条件付期待値の線形性や単調収束定理などから $\mathcal{L}$ が λ-システムであることがわかる．

上の議論より $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ なので，π-λ 定理より，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}$.
よって任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して，$f = 1_A$ の場合も成立する．

（条件付）期待値の線形性，単調収束定理などから一般の有界可測関数 f に対しても成立する． □

チャップマン・コルモゴロフ方程式

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率 $\tilde{\nu}_{\mu,n}$ を

$$\tilde{\nu}_{\mu,n}(A) = \nu_{\mu,p,n}(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times A) = P(X_n \in A) \quad (A \in \mathbb{R})$$

と定める．

系 2.14 (チャップマン・コルモゴロフ方程式)

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると，

$$\tilde{\nu}_{\mu,m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\nu}_{\delta_z,m}(A) d\tilde{\nu}_{\mu,n}(z).$$

演習問題

上の系を証明せよ．

有限空間のマルコフ連鎖の例

例 2.15

有限空間のマルコフ連鎖 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *(Example 2.11)* を考える．
p_{ij}: 状態 i から状態 j へ推移する確率（$1 \le i, j \le n$）

$$0 \le p_{ij} \le 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

系 *2.14* で $m = 1$, $n = l - 1$ とすると，

$$\begin{aligned} P(X_l = j) &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj} P(X_{l-1} = k) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} p_{k_2 j} p_{k_1 k_2} P(X_{l-2} = k_1) \\ &= \cdots = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_l=1}^{n} p_{k_l j} p_{k_{l-1} k_l} \cdots p_{k_1 k_2} P(X_0 = k_1). \end{aligned}$$

有限空間のマルコフ連鎖の例

よって行列 $M = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ を用いて，

$$P(X_l = j) = \sum_{k=1}^{n} [M^l]_{kj} P(X_0 = k)$$

と書ける．ただし，$[M^l]_{ij}$ は M^l の (i, j) 成分．

特に，ある i に対して，$P(X_0 = i) = 1$ なら，

$$P(X_l = j) = [M^l]_{ij}.$$

M を推移確率行列という．

※企業の 1 年の格付推移の確率 p_{ij} が推定できれば，l 年後格付 j に推移する確率が計算できる．

