数理手法VI

第 3 回

1.3 マルチンゲール中心極限定理

確率収束・分布収束

a.s. 収束とは異なる，確率変数の収束の概念を考える．

定義 1.5

1. 確率変数列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が確率変数 Z に「確率収束」するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$\limsup_{n\to\infty} P(|Z_n - Z| \geq \epsilon) = 0$$
となる時をいう．この時 $Z_n \xrightarrow{P} Z$ と書く．
2. 確率変数列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が確率変数 Z に「分布収束」するとは，任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，
$$\lim_{n\to\infty} E[f(Z_n)] = E[f(Z)]$$
となる時をいい，$X_n \xrightarrow{d} X$ と書く．

確率収束・分布収束

$E[f(Z)]$, $E[f(Z_n)]$ は，Z, Z_n の分布 μ_Z, μ_{Z_n} を使って，

$$\int f(x)\mu_Z(dx), \quad \int f(x)\mu_{Z_n}(dx)$$

と書くことができる（分布だけで計算できる）.

Z の代わりに分布 ν を使って $Z_n \xrightarrow{d} \nu$ とも書く．特に ν が正規分布 $N(m, v)$ の時，$Z_n \xrightarrow{d} N(m, v)$.

確率収束・分布収束

例えば，$Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ なら，任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対し，

$$P(a \leq Z_n \leq b) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

となることがわかる．よって正規分布に分布収束する時，n が十分に大きければ，$P(a \leq Z_n \leq b)$ は近似的に求めることができる．

各収束の関係

- 確率変数の三つの収束の間の関係として，

$$Z_n \xrightarrow{P} Z \qquad \text{ならば} \quad Z_n \xrightarrow{d} Z,$$

$$Z_n \to Z \quad \text{a.s.} \quad \text{ならば} \quad Z_n \xrightarrow{P} Z$$

 が成立する.（西尾 3.4 定理 2，5.5 問 7）

- しかし，$Z_n \xrightarrow{d} Z$ となっても $Z_n \xrightarrow{P} Z$ になるとは限らない.
  - 例えば，$Z \sim N(0,1)$, $Z_n = Z$ とすると，$Z_n \xrightarrow{d} Z$ となり，正規分布の対称性から $-Z_n \xrightarrow{d} Z$.
    しかし，$-Z_n \xrightarrow{P} Z$ は成り立たない.

中心極限定理

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 独立かつ同分布の確率変数列，$E[Z_1]=0$, $E[Z_1^2]<\infty$ とした時,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n} Z_m$$

が正規分布に分布収束するというのが中心極限定理.
これをマルチンゲールに一般化したい.

この時

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq m\leq k} Z_m\right)_{k=0}^{n}$$

はマルチンゲールになっている.

※独立かつ同分布の確率変数列を i.i.d. (independent and identically distributed) 確率変数列という.

マルチンゲール中心極限定理

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^{n}$ をフィルトレーションとし，
各 $1 \leq m \leq n$ に対し，$X_{m,n} \in L^1$ が $\mathcal{F}_{m,n}$-可測かつ

$$E[X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}] = 0$$

とする．

この時，$(\sum_{1 \leq m \leq k} X_{m,n})_{k=0}^{n}$ は $(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^{n}$-マルチンゲールになり，
$X_{m,n}$ はマルチンゲール差分アレイと呼ばれる．

マルチンゲール中心極限定理

定理 1.6 (マルチンゲール中心極限定理)
上の $X_{m,n}$ に対して以下の二条件を仮定する.

1. $$\sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^2 | \mathcal{F}_{m-1,n}] \xrightarrow{P} 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$
2. $$\sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^4] \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

この時,

$$\sum_{m=1}^{n} X_{m,n} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

マルチンゲール中心極限定理

証明は省略（Hall and Heyde (1980) “Martingale Limit Theory and Its Application” Corollary 3.1 とその後の Remark を見よ.）

$p > 0$ に対して，$L^p := \{X | X$ は確率変数で $E[|X|^p] < \infty\}$ と書く.
$0 < p < q$ に対して，$X \in L^q$ なら

$$\begin{aligned} E[|X|^p] &= E[|X|^p, \{|X| > 1\}] + E[|X|^p, \{|X| \leq 1\}] \\ &\leq E[|X|^q, \{|X| > 1\}] + E[1, \{|X| \leq 1\}] \leq E[|X|^q] + 1 < \infty. \end{aligned}$$

よって $X \in L^p$ となるので，$L^q \subset L^p$ となる.

マルチンゲール中心極限定理の応用例

例 1.7 (独立確率変数列の中心極限定理)

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: *i.i.d.* 確率変数列，$Z_1 \in L^4$ で，$v = E[(Z_1-\mu)^2] > 0$ とする．
この時 $\mu = E[Z_1]$, とすると，$L^4 \subset L^2$ より $v < \infty$ で，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{Z_m-\mu}{\sqrt{v}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Proof.

$$X_{m,n} = \frac{Z_m-\mu}{\sqrt{nv}}, \quad \mathcal{F}_{m,n} = \sigma(Z_1,\cdots,Z_m)$$

とおくと，$X_{m,n}$ は $\mathcal{F}_{m,n}$-可測，$X_{m,n} \in L^1$ で，

$$E[X_{m,n}|\mathcal{F}_{m-1,n}] = E[X_{m,n}] = 0.$$

よって $X_{m,n}$ はマルチンゲール差分アレイになる．

マルチンゲール中心極限定理の応用例

演習問題

上の $X_{m,n}$ に対して，定理 *1.6* の *1.* と *2.* が成立.

よってマルチンゲール中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{Z_m-\mu}{\sqrt{v}}\xrightarrow{d}N(0,1)\quad\text{as}\quad n\to\infty$$

$\square$

コーシー・シュワルツの不等式

次に独立ではない確率変数列に対して定理 1.6 を適用する．

定理 1.8 (コーシー・シュワルツの不等式)

$X, Y \in L^2$ とすると，

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}.$$

※特に $XY \in L^1$ となる．

Proof.

$t \in \mathbb{R}$ に対し，

$$0 \leq E[(|X| - t|Y|)^2] = E[X^2] - 2tE[|XY|] + t^2 E[Y^2].$$

t に関する二次不等式と見れば，判別式より

$$E[|XY|]^2 - E[X^2]E[Y^2] \leq 0.$$

□

積の分布収束

命題 1.9
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 確率変数列，$c\in\mathbb{R}$, X: 確率変数として，$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} c$ とする．

1. $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$. 特に $cX_n \xrightarrow{d} cX$.
2. $c \neq 0$ なら，
$$\frac{X_n}{Y_n} 1_{\{Y_n \neq 0\}} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}.$$

証明は吉田朋広「数理統計学」（朝倉書店）の定理 1.57 を参照せよ．

AR 過程の最尤推定

例 1.10 (AR 過程の最尤推定)

$0 < \theta_0 < 1$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: *i.i.d.* 確率変数列で $Z_n \sim N(0,1)$ とする．
確率変数列 $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を

$$X_0 = 0, \quad X_n = \theta_0 X_{n-1} + Z_n \ (n \in \mathbb{N})$$

と定める．
$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は *AR(1)* 過程と呼ばれ，時系列の基本的なモデルである．

- X_n は一つ前の値 X_{n-1} を割合 θ_0 だけ残して，新たな乱数 Z_n が追加された形．θ_0 は未知パラメータと呼ばれる．
- 統計学ではデータ $(X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ が与えられた時，θ_0 の値を推定することを考える．θ_0 がわかると将来のデータをシミュレーションしたり，確率や期待値を計算できる．

1．最尤推定量の計算

$0 < \theta < 1$ に対して,

$$L_n((x_k)_{k=0}^n, \theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \exp\left(- \frac{(x_k - \theta x_{k-1})^2}{2} \right)$$

とおく ($\exp(x) = e^x$). すると, $(A_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ に対し,

$$P(X_k \in A_k \ (1 \le k \le n)) = \int_{A_1 \times \cdots \times A_n} L_n((x_k)_{k=0}^n, \theta_0) dx_1 \cdots dx_n \Big|_{x_0=0}$$

と書ける.（L_n は $(X_1, \cdots, X_n)$ の確率密度関数と呼ばれる）

1．最尤推定量の計算

L_n にデータ $(X_k(\omega))_{k=0}^n$ を代入した $L_n((X_k(\omega))$ を最大にする θ の値を θ_0 の推定値とするのが最尤推定である．

$\ell_n(\theta) := \log L_n((X_k)_{k=0}^n, \theta) + \frac{n}{2}\log(2\pi)$ とおくと，$\ell_n(\theta)$ を最大にする θ を求めればよい．

$$\ell_n(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \theta X_{k-1})^2,$$

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} - \theta \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2$$

となる．

1．最尤推定量の計算

よって

$$\ell_n(\theta) \text{ が最大} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2}$$

となる.（ただし，$\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2(\omega) > 0$ とする）

ゆえに最尤推定量は

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2}$$

となる.

2．推定量の漸近正規性

次に

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, 1 - \theta_0^2) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

をマルチンゲール中心極限定理で示す.
この性質は漸近正規性と呼ばれる.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k X_{k-1} - \theta_0 X_{k-1}^2)}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} Z_k}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2}.\end{aligned} \tag{1}$$

2．推定量の漸近正規性

$$\mathcal{F}_{k,n} = \sigma(Z_1, \cdots, Z_k), \quad Y_{k,n} = \frac{\sqrt{1-\theta_0^2}}{\sqrt{n}} X_{k-1} Z_k$$

とすると，$E[Y_{k,n} | \mathcal{F}_{k-1,n}] = 0$.

また，$X_k = \sum_{l=0}^{k-1} \theta_0^l Z_{k-l}$ となるので，$Z_k \in L^2$, $X_{k-1} \in L^2$.
コーシー・シュワルツの不等式より $Y_{k,n} \in L^1$.

よって $Y_{k,n}$ に対して，定理 1.6 の 1. と 2. の条件をチェックすればよい．

２．推定量の漸近正規性

$$\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k,n}^2 | \mathcal{F}_{k-1,n}] = \frac{1-\theta_0^2}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 E[Z_k^2]$$
$$= \frac{1-\theta_0^2}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2.$$

また，

$$\sum_{k=1}^{n} E[Y_{k,n}^4] = \frac{(1-\theta_0^2)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E[X_{k-1}^4 Z_k^4]$$
$$= \frac{(1-\theta_0^2)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E[X_{k-1}^4] E[Z_k^4].$$

2．推定量の漸近正規性

$E[Z_k^4] = 3$（正規分布の 4 次モーメント）であり，$X_k = \sum_{l=0}^{k-1} \theta_0^l Z_{k-l}$ より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{1-\theta_0^2}, \quad \sup_k E[X_{k-1}^4] < \infty \tag{2}$$

が示される．よって定理 1.6 の 1. と 2. が示されるので,

$$\frac{\sqrt{1-\theta_0^2}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} Z_k \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as} \quad n \to \infty \tag{3}$$

(1)–(3) と命題 1.9 より

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, 1-\theta_0^2) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

参考：(2) の証明

$X_k = \sum_{l=0}^{k-1} Z_{k-l}$ より，

$$E[X_k^2] = \sum_{l=0}^{k-1} \theta_0^{2l} E[Z_{k-l}^2] \le \frac{1}{1-\theta_0^2}.$$

また，ある正定数 C に対して

$$E[X_k^4] = \sum_{l=0}^{k-1} \theta_0^{4l} E[Z_{k-l}^4] + \sum_{l_1<l_2} \theta_0^{2l_1+2l_2} \cdot 6E[Z_{k-l_1}^2]E[Z_{k-l_2}^2] \le \frac{C}{1-\theta_0^2}.$$

よって

$$\sup_k E[X_{k-1}^4] < \infty$$

は言える．

参考：(2) の証明

次に $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2 \xrightarrow{P} 1/(1-\theta_0^2)$ を示す.
$X_k = \sum_{l=1}^{k} \theta_0^{k-l} Z_l$ と書けるので,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} \theta_0^{2k-2l} Z_l^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l_1<l_2\le k} \theta_0^{2k-l_1-l_2} Y_{l_1} Y_{l_2}. \tag{4}$$

補題 1.11

$p>0$ とする．確率変数列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$E[|Z_n|^p] \to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty$ ならば，$Z_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty$.

証明は Durrett 5th ed. の Lemma 2.2.2 等を見よ.

参考：(2) の証明

(4) の右辺第一項，第二項をそれぞれ $S_{1,n}, S_{2,n}$ とおくと，

$$\frac{1}{4}E[S_{2,n}^2] = \sum_{k,k'=1}^{n} \sum_{l_1<l_2\le k} \sum_{l_1'<l_2'\le k'} \theta_0^{2k-l_1-l_2+2k'-l_1'-l_2'} E[Y_{l_1}Y_{l_2}Y_{l_1'}Y_{l_2'}]$$

$$= \sum_{k,k'=1}^{n} \sum_{l_1<l_2\le k\wedge k'} \theta_0^{2k+2k'-2l_1-2l_2}.$$

$(E[Y_{l_1}Y_{l_2}Y_{l_1'}Y_{l_2'}]$ は $l_1 = l_1'$ かつ $l_2 = l_2'$ の時 1 でそうでない時 $0)$

参考：(2) の証明

$$\sum_{l_1=0}^{l_2-1} \theta_0^{-2l_1} = \frac{\theta_0^{-2l_2+2} - \theta_0^2}{1-\theta_0^2}$$

などから，ある正定数 C, C', C'' があって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}E[S_{2,n}^2] &\le C \sum_{k,k'=1}^{n} \sum_{l_2 \le k \wedge k'} \theta_0^{2k+2k'-4l_2} \\ &\le C' \sum_{k,k'=1}^{n} \theta_0^{2k+2k'-4k\wedge k'} \\ &\le C' \sum_{k,k'=1}^{n} \theta_0^{2k-2k'} \le C'' n.\end{aligned}$$

参考：(2) の証明

ゆえに $\frac{1}{n}E[S_{2,n}] \to 0$ なので，補題 1.11 より $\frac{1}{n}S_{2,n} \xrightarrow{P} 0$ as $n \to \infty$.

あとは $\frac{1}{n}S_{1,n} \xrightarrow{P} 1/(1-\theta_0^2)$ を示せばよい．正定数 $\tilde{C}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(S_{1,n} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\theta_0^{2k-2l}\right)^2\right]
&= \sum_{k,k'=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{l'=1}^{k'}\theta_0^{2k-2l+2k'-2l'}E[(Y_l^2-1)(Y_{l'}^2-1)] \\
&= 2\sum_{k,k'=1}^{n}\sum_{l=1}^{k\wedge k'}\theta_0^{2k+2k'-4l} \le \tilde{C}n.
\end{aligned}
$$

よって補題 1.11 より

$$
\frac{1}{n}S_{1,n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\theta_0^{2k-2l} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{5}
$$

参考：(2) の証明

$$\sum_{l=1}^{k} \theta_0^{2k-2l} \to \frac{1}{1-\theta_0^2} \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} \theta_0^{2k-2l} \to \frac{1}{1-\theta_0^2} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

ゆえに (5) と合わせて,

$$\frac{1}{n} S_{1,n} \xrightarrow{P} \frac{1}{1-\theta_0^2}.$$

