クレジット:
Mathematics and Informatics Center 数理手法VI 2020 荻原哲平

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

数理手法VI

第 2 回

1.2 マルチンゲール収束定理

上向き横断不等式

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ を $\mathbb{F}$-adapted とする.
（つまり，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して，X_n は $\mathcal{F}_n$-可測.）

劣マルチンゲールの $n \to \infty$ での収束を考えるために，まず X が a と b の間を横断する回数について考える.

$N_0 = -1$ として，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} N_{2k-1} &= \inf\{m > N_{2k-2}; X_m \leq a\}, \\ N_{2k} &= \inf\{m > N_{2k-1}; X_m \geq b\} \end{aligned}$$

とおく.

上向き横断不等式

各 k に対して，N_{2k-1}，N_{2k} が停止時刻であることが帰納的に示される．

$$U_n = \max\{k; N_{2k} \leq n\}$$

とおくと，U_n は $[a, b]$ を上向きに横断する回数を表す．

上向き横断不等式

命題 1.1 (上向き横断不等式)
$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を劣マルチンゲールとする．この時,

$$(b-a)E[U_n] \leq E[(X_n-a)^+].$$

Proof. $N_k \wedge n$ は停止時刻なので，$Y_0 = X_0$, $Y_k = X_{N_k\wedge n}$ $(k\in\mathbb{N})$ とおくと，任意停止定理より，$(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ は $(\mathcal{F}_{N_k})_{k\in\mathbb{Z}_+}$-劣マルチンゲール.

この時 $\sum_{k=1}^{\infty}(Y_{2k+1}-Y_{2k})$ の値を考える.

上向き横断不等式の証明

1. $k < U_n$ の時,
   $N_{2k+1} \le n$ なので， $Y_{2k+1} \le a$ かつ $Y_{2k} \ge b$ より,
   $Y_{2k+1} - Y_{2k} \le a - b$.
2. $k > U_n$ の時,
   $N_{2k} > n$. よって $Y_{2k+1} = Y_{2k} = X_n$.
3. $k = U_n$ かつ $N_{2k+1} \le n$ の時,
   $Y_{2k+1} \le a$ かつ $Y_{2k} \ge b$ より,
   $Y_{2k+1} - Y_{2k} \le a - b \le (X_n - a)^+ + (a - b)$.
4. $k = U_n$ かつ $N_{2k+1} > n$ の時,
   $Y_{2k+1} - Y_{2k} \le X_n - b \le (X_n - a)^+ + (a - b)$.

上向き横断不等式の証明

1.-4. を合わせると，

$$\sum_{k=1}(Y_{2k+1} - Y_{2k}) \leq (a-b)U_n + (X_n - a)^+.$$

$(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ は劣マルチンゲールなので，$E[Y_{2k+1} - Y_{2k}] \geq 0$. よって

$$0 \leq (a-b)E[U_n] + E[(X_n - a)^+].$$

$\square$

マルチンゲール収束定理

定義 1.2

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を確率過程，X を確率変数とする．$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ が X に *a.s.* 収束するとは，

$$P(\{\omega; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

となる時をいい，$X_n \to X$ *a.s.* と書く．

定理 1.3

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を劣マルチンゲールとし，$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} E[X_n^+] < \infty$ とする．この時，ある $X_\infty \in L^1$ があって，

$$X_n \to X_\infty \quad \text{a.s.}$$

マルチンゲール収束定理の証明

Proof. 上向き横断不等式より

$$E[U_n] \leq \frac{E[(X_n - a)^+]}{b-a} \leq \frac{|a| + E[X_n^+]}{b-a}.$$

$U_\infty := \sup_n U_n$ とすると，$U_n \nearrow U_\infty$（単調に収束）であるから，ファトゥの補題から $E[U_\infty] < \infty$.
よって X_n が $[a,b]$ を上向きに横断する回数は a.s. で有限となる.

マルチンゲール収束定理の証明

$a, b \in \mathbb{R}$ は任意なので,

$$A = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} \{\omega; X_n(\omega) \text{ が } [a,b] \text{ を上向きに無限回横断}\}$$

とおくと, $P(A) = 0$.

マルチンゲール収束定理の証明

もしある $\omega \in \Omega$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

とすると，$a, b \in \mathbb{Q}$ で

$$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) > b > a > \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

となるものがとれる．

マルチンゲール収束定理の証明

この時 $X_n(\omega) > b$ となる n が無限個あり，$X_m(\omega) < a$ となる m も無限個ある．つまり，$(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a, b]$ を無限回横断するので，$\omega \in A$.
よって

$$P\left(\left\{\omega; \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\}\right) \leq P(A) = 0.$$

マルチンゲール収束定理の証明

よって lim sup と lim inf が等しい $\omega \in \Omega$ に対して，確率変数 X_∞ を $X_\infty(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$ と定め，そうでない $\omega \in \Omega$ に対して，$X_\infty(\omega) = 0$ と定めると，

$$P\left(\left\{\omega; \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega)\right\}\right) = 1.$$

つまり $X_n \to X_\infty$ a.s.

あとは $X_\infty \in L^1$ をしめせば良い．

マルチンゲール収束定理の証明

$X_\infty^+ = \liminf_{n\to\infty} X_n^+$ a.s. なので，ファトゥの補題より

$$E[X_\infty^+] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n^+] \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} E[X_n^+] < \infty.$$

また，$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は劣マルチンゲールなので，

$$E[X_n^-] = E[X_n^+] - E[X_n] \leq E[X_n^+] - E[X_0].$$

マルチンゲール収束定理の証明

よってファトゥの補題より

$$E[X_\infty^-] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n^-] \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} E[X_n^+] - E[X_0] < \infty.$$

ゆえに $E[|X_\infty|] = E[X_\infty^+] + E[X_\infty^-] < \infty$ より，$X_\infty \in L^1$. □

マルチンゲール収束定理の系

系 1.4

$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を非負値優マルチンゲールとすると，ある $X_\infty \in L^1$ があって，
$X_n \to X_\infty$ *a.s.*

Proof.

$(-X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は劣マルチンゲールで $\sup_n E[(-X_n)^+] = \sup_n E[0] = 0 < \infty$
よりマルチンゲール収束定理の条件を満たす. $\square$

※特に非負値のマルチンゲールは a.s. 収束する.

確率分布

Recall

確率変数 X に対して，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率 μ_X が

$$\mu_X(A) = P(X \in A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

と定まる．μ_X を X の分布と呼ぶ.

μ_X が平均 m，分散 v の正規分布の時，$X \sim N(m, v)$ と書く.

大数の強法則

定理 (大数の強法則)

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 独立な確率変数列で，任意の n に対し，$Z_n \in L^1$, $\mu_{Z_n} = \mu_{Z_1}$ とする．この時

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \to E[Z_1] \quad \text{a.s.}$$

マルチンゲール収束定理を使って大数の強法則を示すこともできる．（西尾 7.6 節例 1）

※ $\mu_{Z_n} = \mu_{Z_1}$ の時，$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は同分布であるという．

ギャンブラーの破産

数理手法 IV で扱ったようなギャンブルを繰り返す例を考える．
すなわち，所持金が 100 円で，勝ったら 10 円もらえて負けたら 10 円払うギャンブルを繰り返す．

n 回目の損益を確率変数 Z_n で表す．

$$P(Z_n = 10) = 1/2, \quad P(Z_n = -10) = 1/2.$$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を独立として，$S_n = 100 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$ とおくと，$(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ はマルチンゲール．

ギャンブラーの破産

停止時刻 τ を

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{Z}_+; S_n = 0\}$$

とすると，τ は停止時刻なので，$X_n = S_{n \wedge \tau}$ は非負値マルチンゲール（数理手法 IV 命題 3.24）.

よって系 1.4 より，ある $X_\infty \in L^1$ があって，$X_n \to X_\infty$ a.s.

ギャンブラーの破産

X_∞ は X_n の収束先なので，非負整数値確率変数になる．

$X_n(\omega)$ が $X_\infty(\omega)$ に収束するような $\omega \in \Omega$ を一つ固定する．（このような ω の集合は確率 1）

すると，十分大きい N に対して，$n \geq N$ なら $|X_n(\omega) - X_\infty(\omega)| < 1$ となるが，$X_n(\omega)$, $X_\infty(\omega)$ は整数値なので

$$X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \quad (n \geq N) \tag{1}$$

ギャンブラーの破産

もし $X_\infty(\omega) \neq 0$ とすると，$X_N(\omega) = X_\infty(\omega) \neq 0$ より，$\tau > N$.
よって $X_N(\omega) = S_N(\omega)$, $X_{N+1} = S_{N+1}(\omega)$ となり，

$$X_{N+1}(\omega) - X_N(\omega) = S_{N+1}(\omega) - S_N(\omega) = Z_{N+1} \neq 0.$$

これは (1) に矛盾．よって $X_\infty(\omega) = 0$.

よって確率 1 で $X_\infty = 0$ となり，$X_n \to 0 \quad \text{a.s.}$

つまり，<u>このギャンブルを繰り返すと確率 1 で破産する．</u>

分枝過程

$(Z_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$: 独立で同分布な (i.i.d. という) 確率変数列，各 Z_i^n は $\mathbb{Z}_+$ に値をとるとし，$E[Z_1^1] = \theta \in (0,\infty)$ とする．
$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_i^m; i \in \mathbb{N}, m \leq n)$, $X_0 = 1$,

$$X_n = Z_1^n + \cdots + Z_{X_{n-1}}^n \ (n \in \mathbb{N})$$

とする．$(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ は分枝過程 (branching process) と呼ばれ，生物集団の個体数の時間変化を表す．

分枝過程

$$
\begin{aligned}
E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E\left[X_n \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{X_{n-1}=k\}} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E[X_n 1_{\{X_{n-1}=k\}}|\mathcal{F}_{n-1}] \quad (\text{単調収束定理}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E[Z_1^n + \cdots + Z_k^n|\mathcal{F}_{n-1}]1_{\{X_{n-1}=k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E[Z_1^n + \cdots + Z_k^n]1_{\{X_{n-1}=k\}} \\
&\qquad (\mathcal{F}_{n-1} \text{ と } Z_1^n + \cdots + Z_k^n \text{ の独立性}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \theta k 1_{\{X_{n-1}=k\}} = \theta X_{n-1}.
\end{aligned}
$$

分枝過程

よって $(\theta^{-n}X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は非負値マルチンゲール．
ゆえに系 1.4 より，ある $X_\infty \in L^1$ があって，

$$\theta^{-n}X_n \to X_\infty \quad \text{a.s.}$$

- n が十分大きい時，$X_n \approx \theta^n X_\infty$ となり，θ がわかれば X_n の大体の水準がわかる．
- $X_\infty > 0$ a.s. なら $X_n/X_{n-1} \to \theta$ a.s. がわかるので n が十分大きい時増え方はほぼ定数．

分枝過程

- X_∞ がわかればさらに X_n を特定できる．実際，
  1. $\theta < 1$ なら $X_\infty = 0$.
  2. $\theta > 1$, $\mathrm{var}(Z_i^n) = \sigma^2 < \infty$ なら

$$E[X_\infty] = 1, \quad \mathrm{var}(X_\infty) = \frac{\sigma^2\theta^{-2}}{1-\theta^{-1}}.$$

(Durrett 5th ed Section 4.3, Section 4.4)