2 重積分−極座標への変換

多重積分

$$\int\int_D dxdyf(x,y)$$

を考える．積分領域によっては，座標変換をした方が便利が良いことも多い．

2次元極座標は次のように定義される (r,θ) である．

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

あるいは

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である．

この場合のヤコビ行列は直接計算することも簡単にできる．

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

これからヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = r$$

と得られる．

こうして面積要素の変換

$$dxdy = rdrd\theta$$

が得られる．

MATLABにはヤコビ行列を求めるルーチンもある．これを使ってみよう．

```
syms r theta
x=r.*cos(theta)
```

x = $r\cos(\theta)$

```
y=r.*sin(theta)
```

y = $r\sin(\theta)$

```
J=jacobian([x,y],[r theta])
```

```
J =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

```
Jdet=det(J)
```

Jdet = $r\cos(\theta)^2 + r\sin(\theta)^2$

MATLABもさほど賢くはないようです．この場合にはsimplifyというコマンドを使えば簡単化してくれます．

```
Jdet2=simplify(Jdet)
```

Jdet2 = r

ここでヤコビ行列あるいはヤコビ行列式の意味を考えてみよう．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

は2次元平面上で $\mathrm{O} = (0,0)$，$\mathrm{A} = (a,b)$，$\mathrm{C} = (c,d)$ の3点を頂点とする3角形の面積の2倍，言い換えればベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積（ただし符号が付く）を表す．つまり面素 $dxdy$ と $drd\theta$ の比ということになる．

ヤコビ行列式の絶対値がここに出てくるのは，次元が上がっても同じである．

% 極座標を用いた具体的な2次元平面上の積分を実行してみよう．

問題

領域を $D = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0)\}$ としたとき，積分

$$I = \int\int_D x^2 dxdy$$

を求めよ．

解

変換 $x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$ を行うと領域 D は

$D = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

となる．ヤコビ行列式は

```
syms a b r theta
x=a*r.*cos(theta)
```

x = $a\,r\cos(\theta)$

```
y=b*r.*sin(theta)
```

y = $b\,r\sin(\theta)$

```
J=jacobian([x,y],[r theta])
```

J =

$$\begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\,r\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & b\,r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

```
Jdet=simplify(det(J))
```

Jdet = $a\,b\,r$

```
Jdet2=simplify(Jdet)/(a*b)
```

Jdet2 = r

と計算できる.

積分には，2次元積分ルーティン integral2 を用いるが，その中に シンボリック変数が混ざっていてはいけないので、Jdet２から ab は外した.

したがって計算の最後にこの係数 ab を忘れず戻す.

```
polarfun=@(rp,thetap) (rp.*cos(thetap)).^2.*rp
```

polarfun = 値をもつ *function_handle:*
    @(rp,thetap)(rp.*cos(thetap)).^2.*rp

となる.

積分を実行すれば

```
K=integral2(polarfun,0,1,0,2*pi)
```

K = 0.7854

答としては x^2 からの a^2 とヤコビ行列式からの ab がある．それを戻して

$$I = K * a^3 b = \frac{\pi}{4} * a^3 b$$

となる $\left(K = 0.7854 = \frac{\pi}{4}\right)$．この積分はMATLABを使わないでも簡単にできる.

問題

(1) 上の例題をMATLABを使わず実行せよ.

(2) 領域を $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ として,

$$I=\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

をMATLABを用いまた,MATLABを用いずに手で計算せよ.