

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



2重積分-極座標への変換

多重積分

$$\int \int_D dx dy f(x, y)$$

を考える。積分領域によっては、座標変換をした方が便利が良いことも多い。

2次元極座標は次のように定義される (r, θ) である。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

あるいは

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

である。

この場合のヤコビ行列は直接計算することも簡単にできる。

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

これからヤコビ行列式 (ヤコビアン) は

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = r$$

と得られる。

こうして面積要素の変換

$$dx dy = r dr d\theta$$

が得られる。

MATLABにはヤコビ行列を求めるルーチンもある。これを使ってみよう。

```
syms r theta
x=r.*cos(theta)
```

```
x = r cos(theta)
```

```
y=r.*sin(theta)
```

```
y = r sin(theta)
```

```
J=jacobian([x,y],[r theta])
```

J =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Jdet=det(J)

$$Jdet = r \cos(\theta)^2 + r \sin(\theta)^2$$

MATLABもさほど賢くはないようです。この場合にはsimplifyというコマンドを使えば簡単化してくれます。

Jdet2=simplify(Jdet)

$$Jdet2 = r$$

ここでヤコビ行列あるいはヤコビ行列式の意味を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

は2次元平面上で $O = (0,0)$, $A = (a,b)$, $C = (c,d)$ の3点を頂点とする3角形の面積の2倍, 言い換えればベクトル

\vec{OA} \vec{OC} 2
を辺とする平行四辺形の面積 (ただし符号が付く) を表す。つまり面素 $dx dy$ と $dr d\theta$ の比とい

ヤコビ行列式の絶対値がここに出てくるのは, 次元が上がっても同じである。

% 極座標を用いた具体的な2次元平面上の積分を実行してみよう。

問題

領域を $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0)\}$ としたとき, 積分

$$I = \int \int_D x^2 dx dy$$

を求めよ。

解

変換 $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ を行くと領域 D は

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

となる。ヤコビ行列式は

```
syms a b r theta
x=a*r.*cos(theta)
```

$$x = a r \cos(\theta)$$

```
y=b*r.*sin(theta)
```

$$y = b r \sin(\theta)$$

```
J=jacobian([x,y],[r theta])
```

J =

$$\begin{pmatrix} a \cos(\theta) & -a r \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & b r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

```
Jdet=simplify(det(J))
```

$$Jdet = a b r$$

```
Jdet2=simplify(Jdet)/(a*b)
```

$$Jdet2 = r$$

と計算できる.

積分には, 2次元積分ルーティン `integral2` を用いるが, その中にシンボリック変数が混ざってはいけ
ないので, `Jdet2` から ab は外した.

したがって計算の最後にこの係数 ab を忘れず戻す.

```
polarfun=@(rp,thetap) (rp.*cos(thetap)).^2.*rp
```

```
polarfun = 値をもつ function_handle:  
@(rp,thetap)(rp.*cos(thetap)).^2.*rp
```

となる.

積分を実行すれば

```
K=integral2(polarfun,0,1,0,2*pi)
```

$$K = 0.7854$$

答としては x^2 からの a^2 とヤコビ行列式からの ab がある. それを戻して

$$I = K * a^3 b = \frac{\pi}{4} * a^3 b$$

となる $\left(K = 0.7854 = \frac{\pi}{4}\right)$. この積分は **MATLAB** を使わないでも簡単にできる.

問題

(1) 上の例題をMATLABを使わず実行せよ.

(2) 領域を $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ として,

$$I = \int \int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

をMATLABを用いた, MATLABを用いずに手で計算せよ.