クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

2 重積分（2変数）

2重積分

$$\int\int_D f(x,y)\ dxdy$$

を考える.

ここでは簡単の場合（x, y について直接積分できる場合）を考え，変数変換した方が良い場合は後回しとする.

2次元定積分には

$$q = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy\ \ f(x,y)$$

に対応したコマンド

`q = integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax)`

がある．ただし，先に y について積分し，次に x について積分するという順番で行う.

一般には，積分の順番には気をつけなくてはいけない（Case2 と Case3 とを比較）.

以下では定積分をする前に，$(x，y)$-空間での等高線と積分領域を図に描くことにする.

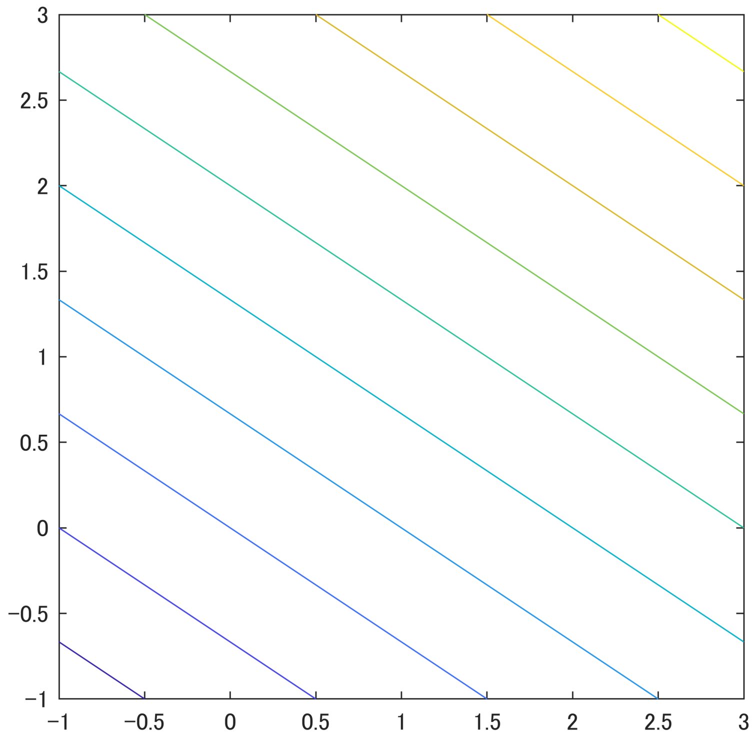
Case #1

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy\ (2x+3y)$$

この問題では問題なく、積分の順番は特に注意を要しない.

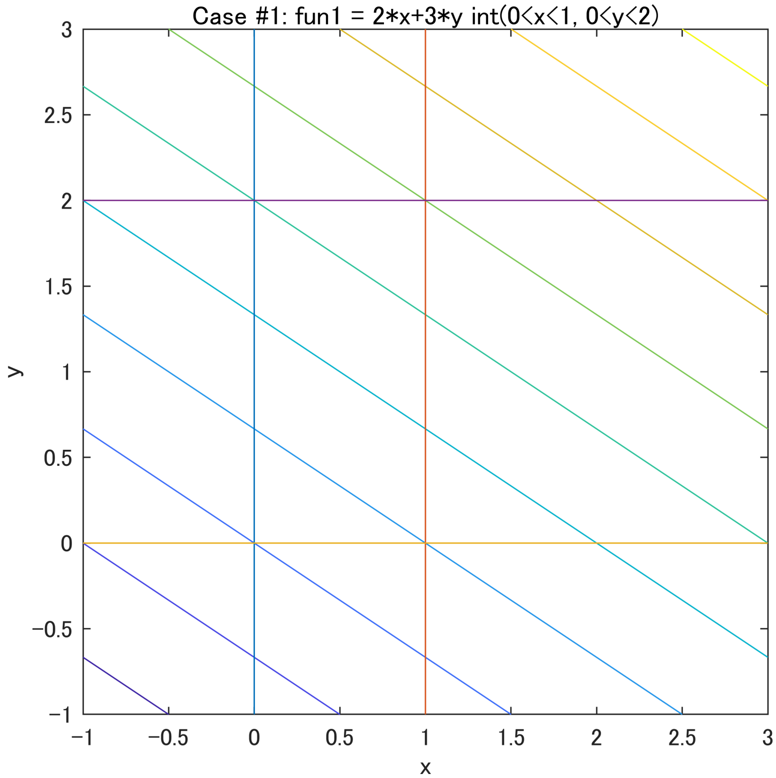
Step 1 積分関数の定義等高線およびの図示.

```
syms x y lambda
%%%case #1 (0<x<1, 0<y<2)    %%%
fun1 = @(x,y) (2*x+3*y);
fc1=fcontour(fun1,[-1 3 -1 3]);daspect([1 1 1])
```



Step 2 積分領域

```
hold on;fimplicit(@(x,y) x,[-1 3 -1 3]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-1,[-1 3 -1 3]);
hold on;fimplicit(@(x,y) y,[-1 3 -1 3]);
hold on;fimplicit(@(x,y) y-2,[-1 3 -1 3]);
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Case #1: fun1 = 2*x+3*y int(0<x<1, 0<y<2)')
hold on
```

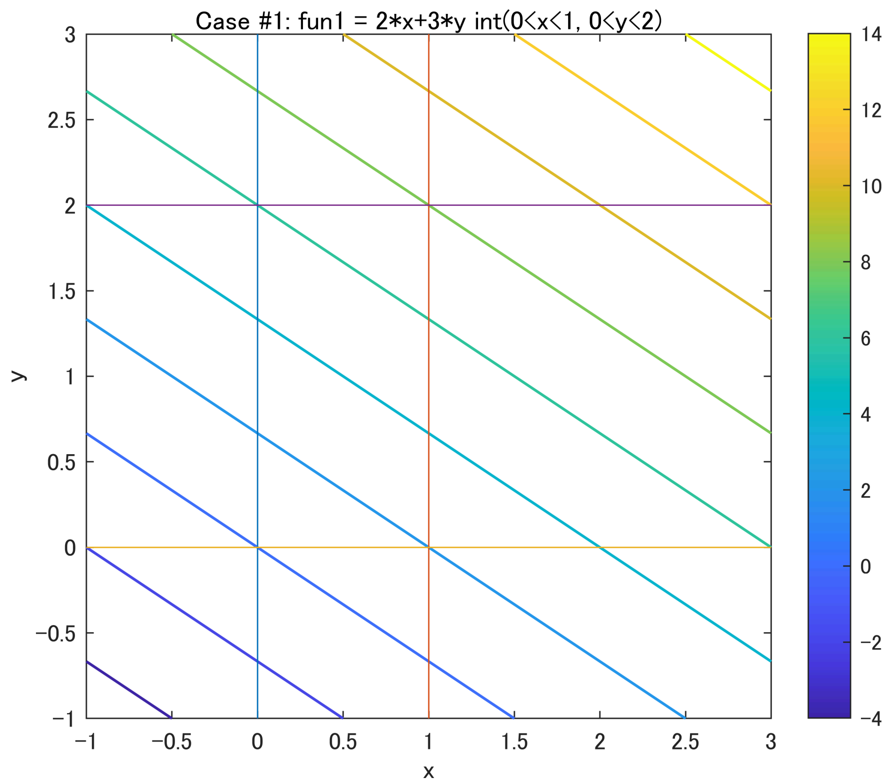



Step 3 等高線の値と太さの定義およびカラーバー

```
fc1.LevelList = [14 12 10 8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8 -10 -12 -14];
fc1.LineWidth=1
```

```
fc1 = 
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: @(x,y)(2*x+3*y)
       XRange: [-1 3]
       YRange: [-1 3]
    LineColor: 'flat'
    LineStyle: '-'
    LineWidth: 1
         Fill: off
    LevelList: [14 12 10 8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8 -10 -12 -14]

  すべてのプロパティ を表示
```

```
hold on
colorbar
daspect([1 1 1])
```




```
%  Step 4 定積分
```

```
q1=integral2(fun1, 0,1,0,2)
```

```
q1 = 8
```

```
fun1p = @(x,y) (2*y+3*x);
q1=integral2(fun1p, 0,2,0,1)
```

```
q1 = 8.0000
```

これなどは手で計算しても簡単である．

Case #2

$$\int_0^1 dx\left\{\int_{x^2}^{x} dy\ \left(x^2+y^2\right)\right\}$$

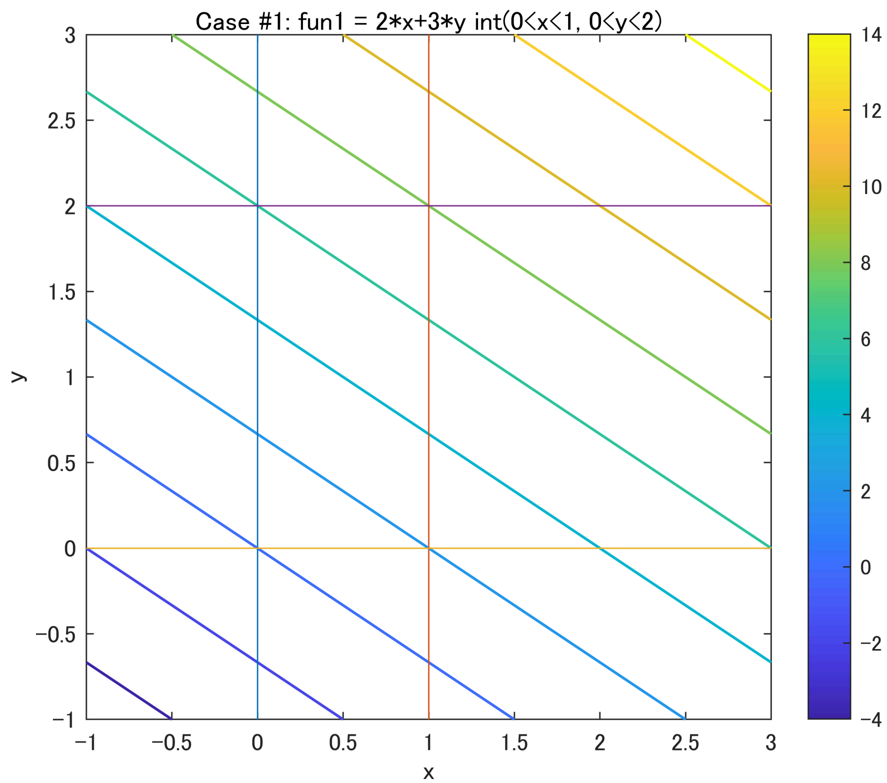
この問題では，積分領域は

$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x$

積分の順番は注意を要する．

Step 1 積分関数の定義等高線およびの図示.

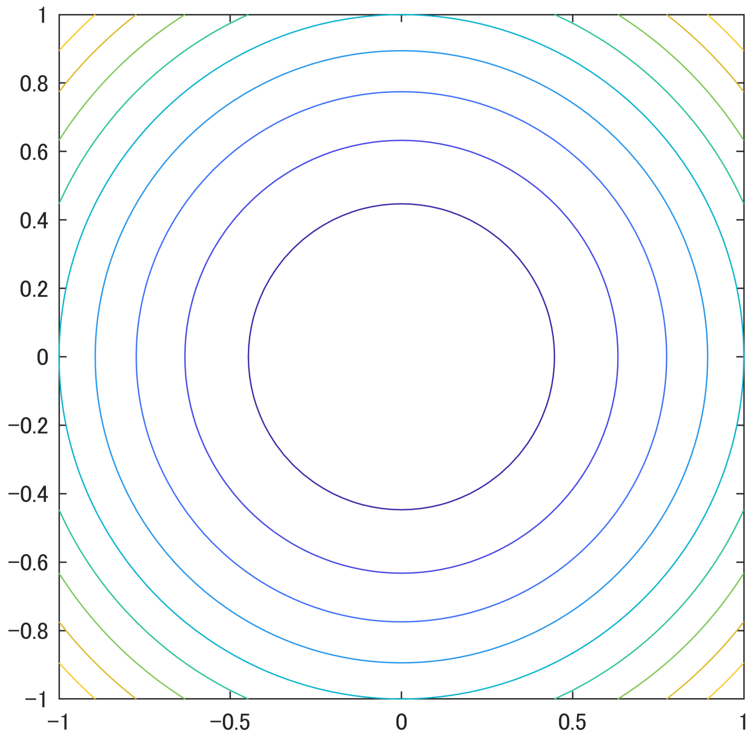
```
%%%case #2 (0<x<1, x^2<y<x)    %%%
hold off
```




```
fun2 = @(x,y) (x.^2+y.^2);
fc2=fcontour(fun2,[-1 1 -1 1])
```

```
fc2 = 
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: @(x,y)(x.^2+y.^2)
       XRange: [-1 1]
       YRange: [-1 1]
    LineColor: 'flat'
    LineStyle: '-'
    LineWidth: 0.5000
         Fill: off
    LevelList: [0.2000 0.4000 0.6000 0.8000 1 1.2000 1.4000 1.6000 1.8000 2]

  すべてのプロパティ を表示
```

```
daspect([1 1 1])
```

Step 2 積分領域

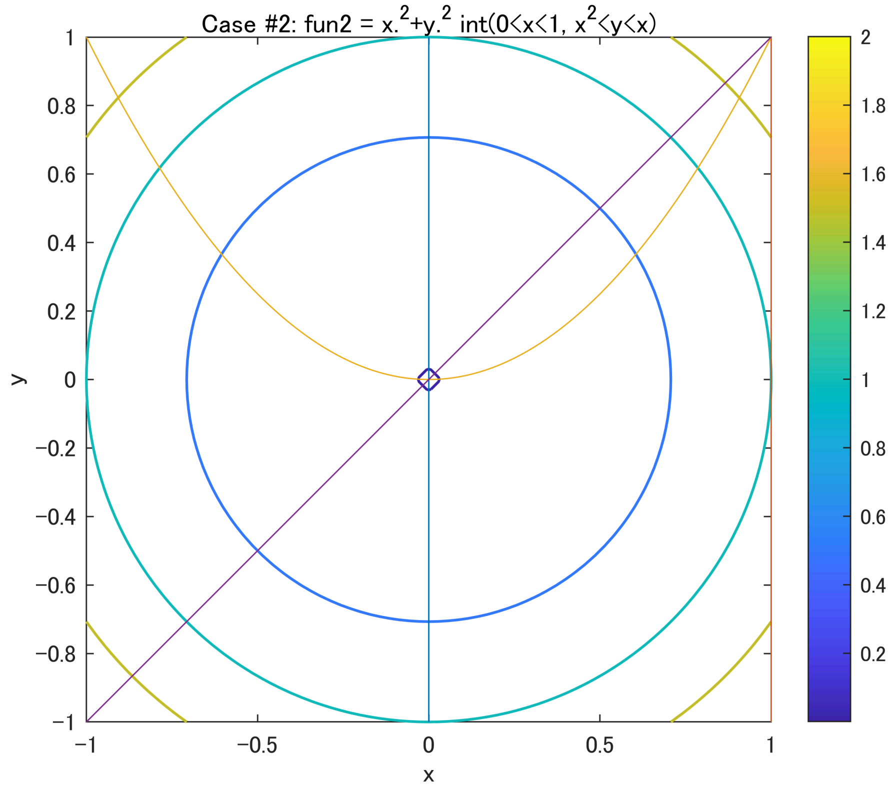
```
hold on;fimplicit(@(x,y) x,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-1,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x.^2-y,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-y,[-1 1 -1 1]);
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Case #2: fun2 = x.^2+y.^2 int(0<x<1, x^2<y<x)')
hold on
%
fc2.LevelList = [3 2 1.5 1 0.5 0.001 -0.5 -1];
fc2.LineWidth=1
```

```
fc2 = 
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: @(x,y)(x.^2+y.^2)
       XRange: [-1 1]
       YRange: [-1 1]
    LineColor: 'flat'
    LineStyle: '-'
    LineWidth: 1
         Fill: off
    LevelList: [3 2 1.5000 1 0.5000 1.0000e-03 -0.5000 -1]
```

すべてのプロパティ を表示

```
hold on
```

```
colorbar
daspect([1 1 1])
```



Step 3 定積分の実行

```
ymin=@(x) x.^2;
ymax=@(x) x;
q2=integral2(fun2,0,1,ymin,ymax)
```

```
q2 = 0.0857
```

問題：

この積分を手で計算せよ。

Case #3

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} dy \ (x^2 + y^2) \right\}$$

この問題は　Case #2 と同じである．先の問題では積分領域は

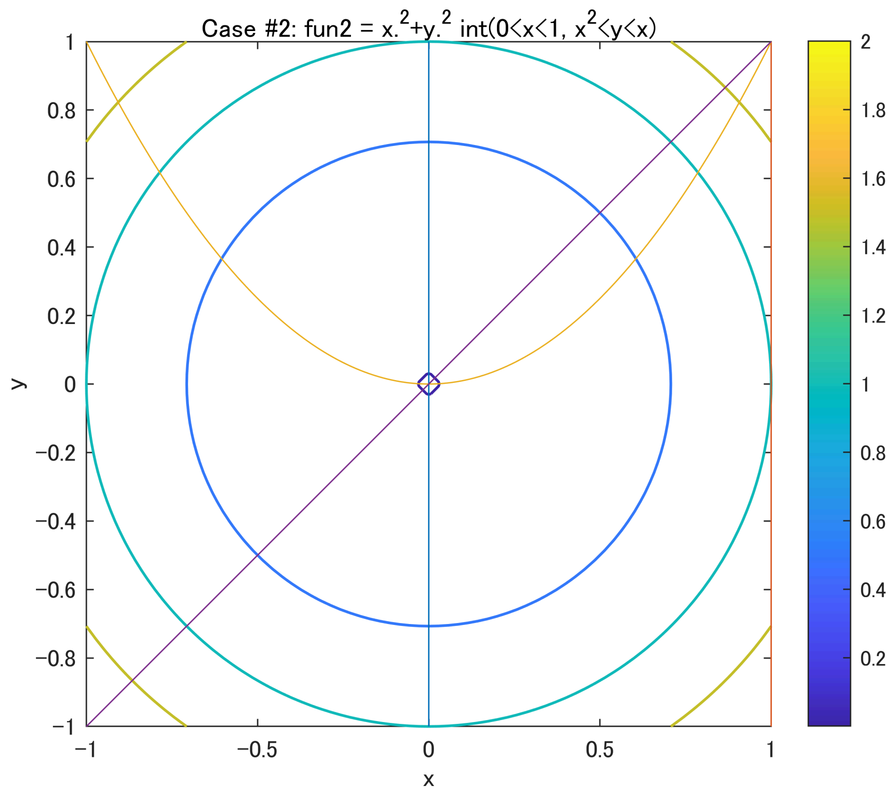
$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x$

であったが，ここでは x で積分し次に y で積分する．具体的には

$$\int dy \int_{0\le x\le 1, x^2\le y\le x} dx\ (x^2+y^2) = \int_0^1 dy \int_{x^2\le y\le x} dx\ (x^2+y^2) = \int_0^1 dy \int_{y\le x\le \sqrt{y}} dx\ (x^2+y^2)$$

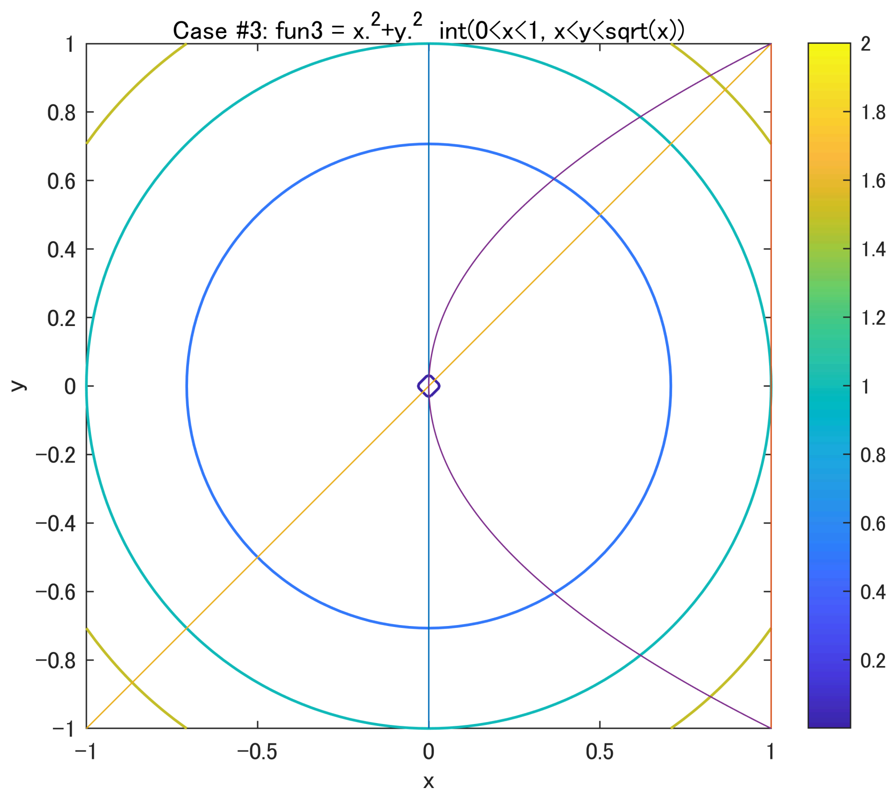
と変形される．最後に x, y 入れ替えたものが上の式である．

```
%%%case #3 Same as #2 (0<x<1, x<y<sqrt(x))  %%%
% Step 1 積分関数の定義等高線およびの図示.
hold off
```




```
fun3 = @(x,y) x.^2+y.^2;
fc3=fcontour(fun3,[-1 1 -1 1]);

%  Step 2  積分領域
hold on;fimplicit(@(x,y) x,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-1,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-y,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-y.^2,[-1 1 -1 1]);
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Case #3: fun3 = x.^2+y.^2  int(0<x<1, x<y<sqrt(x))')
hold on

% Step 3 等高線の値と太さの定義およびカラーバー
fc3.LevelList = [3 2 1.5 1 0.5 0.001 -0.5 -1];
fc3.LineWidth=1;
```

```
hold on
colorbar
daspect([1 1 1])
```




```
%  Step 4 定積分
ymin=@(x) x;
ymax=@(x) sqrt(x);
q3=integral2(fun3,0,1,ymin,ymax)
```

```
q3 = 0.0857
```

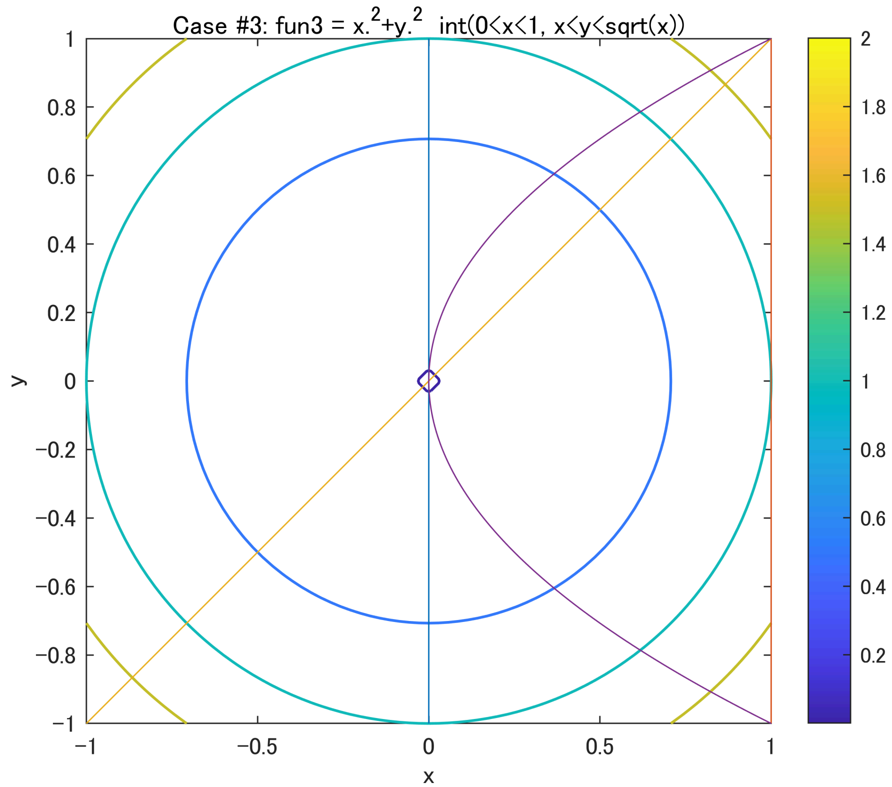
Case #4

$$\int dx \int_{0\le x,\ 0\le y,\ x^2+y^2\le 1} dy\ \ xy = \int_0^1 dx\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\ \ xy\right\}$$

この問題では問題なく積分の順番は特に注意を要しない.

なぜなら y についての積分は $0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \rightarrow x^2+y^2 \le 1$ となるから.

```
%%%case #4 (0<x, 0<y, x^2+y^2<1)  %%%
%  Step 1 積分関数の定義等高線およびの図示.
hold off
```

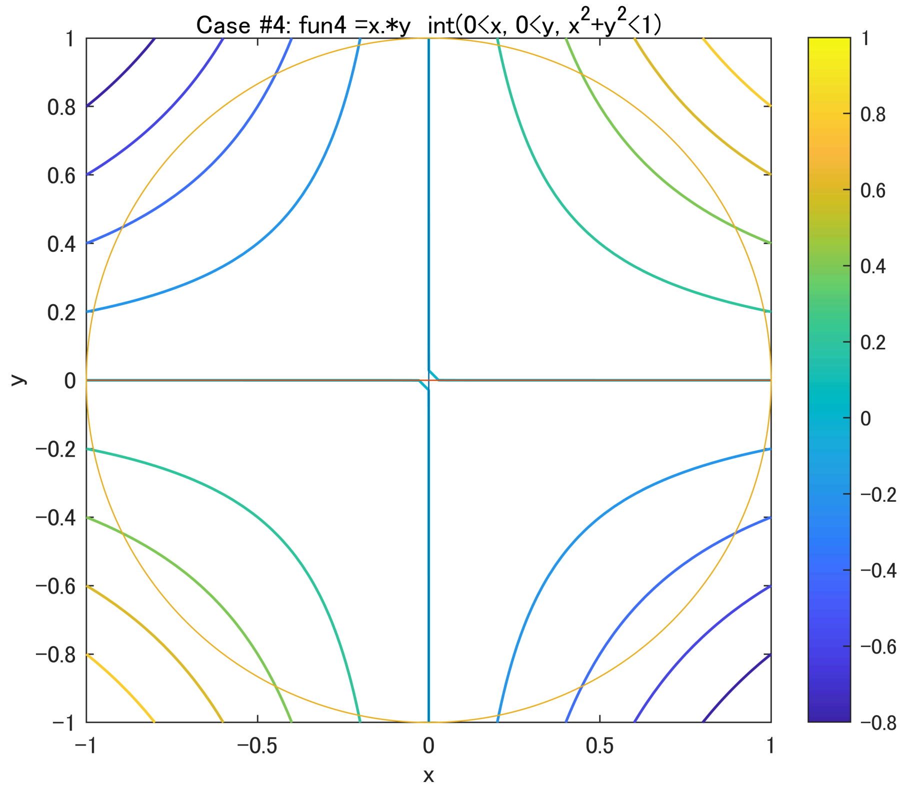




```
fun4 = @(x,y) x.*y;
fc4=fcontour(fun4,[-1 1 -1 1]);
daspect([1 1 1])

%  Step 2  積分領域
hold on;fimplicit(@(x,y) x,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) y,[-1 1 -1 1]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x.^2+y.^2-1,[-1 1 -1 1]);
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Case #4: fun4 =x.*y  int(0<x, 0<y, x^2+y^2<1)')
hold on

% Step 3 等高線の値と太さの定義およびカラーバー

fc4.LevelList = [1 0.8 0.6 0.4 0.2 0.00001 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8 -1];
fc4.LineWidth=1
```

```
fc4 =
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: @(x,y)x.*y
       XRange: [-1 1]
       YRange: [-1 1]
    LineColor: 'flat'
    LineStyle: '-'
    LineWidth: 1
         Fill: off
    LevelList: [1 0.8000 0.6000 0.4000 0.2000 1.0000e-05 -0.2000 -0.4000 -0.6000 -0.8000 -1]
```

すべてのプロパティ を表示

```
hold on
colorbar
```




```
%  Step 4 定積分

ymax=@(x) sqrt(1-x.^2);
q4=integral2(fun4,0,1,0,ymax)
```

```
q4 = 0.1250
```

問題

(1) 上の問題#1~#4を解析的に積分せよ．

(2) 積分

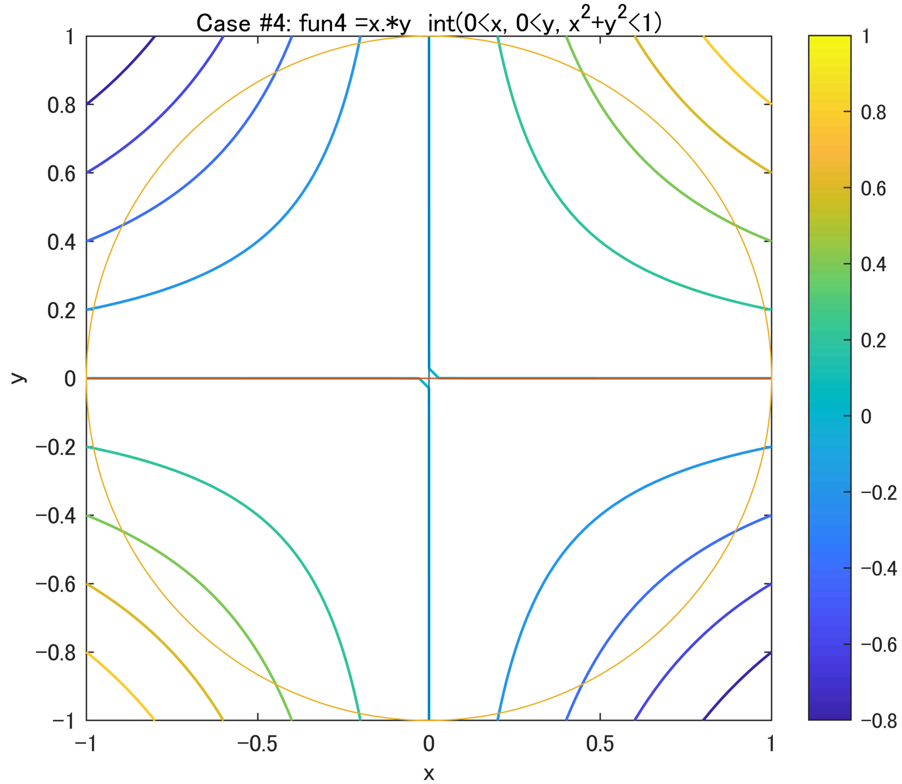
$$\int\int_{0\le x\le 1,\ x^2\le y\le -x+2} x\ dxdy$$

を積分せよ．まず，等高線図および積分領域を考えよ．

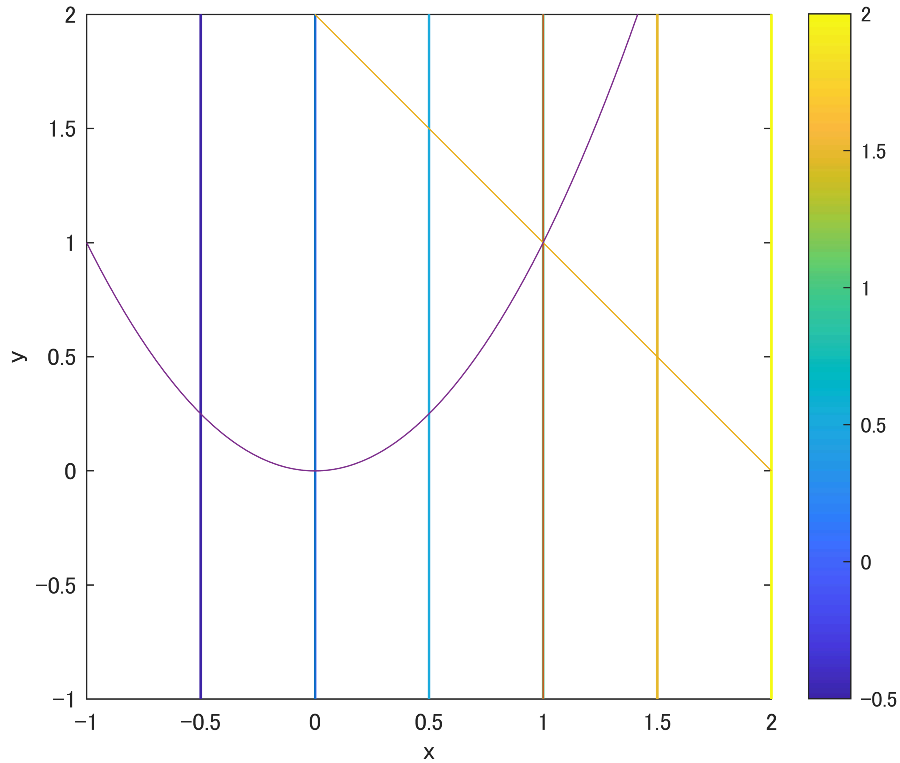
(3) 上の積分を，MATLABに依らず手で実行せよ．その場合，積分の順序を x から先に行うものと，y を先に行うもの双方を試みよ．

```
% Step 1 積分関数の定義等高線およびの図示.
```

```
hold off
```




```
fun3 = @(x,y) x;
fc3=fcontour(fun3,[-1 2 -1 2]);

%  Step 2  積分領域
hold on;fimplicit(@(x,y) x,[-1 2 -1 2]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x-1,[-1 2 -1 2]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x+y-2,[-1 2 -1 2]);
hold on;fimplicit(@(x,y) x.^2-y,[-1 2 -1 2]);
hold on
xlabel('x')
ylabel('y')
hold on

% Step 3 等高線の値と太さの定義およびカラーバー
fc3.LevelList = [3 2 1.5 1 0.5 0.001 -0.5 -1];
fc3.LineWidth=1;
hold on
colorbar
daspect([1 1 1])
```


y
x
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2
1.5
1
0.5
0
−0.5