クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

第11講　二変数関数の積分

一変数積分の簡単な復習

累次積分

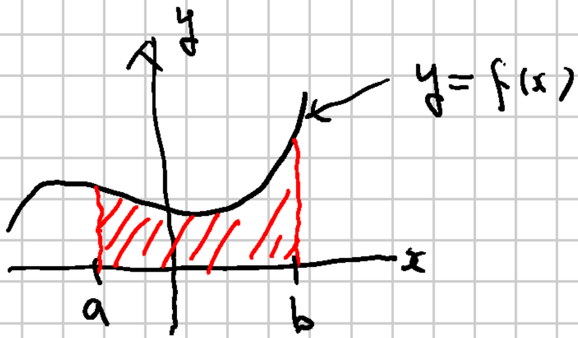
- 長方形領域における積分
  - 累次積分の順序可換性
- 積分領域がx,yに依存する場合
  - 順序交換に関する注意点
- Greenの定理：部分積分の一般化

重積分

- 考え方
- 積分変数の変換
  - ヤコビアン
- 極座標

一変数関数の積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{斜線部の面積}$$

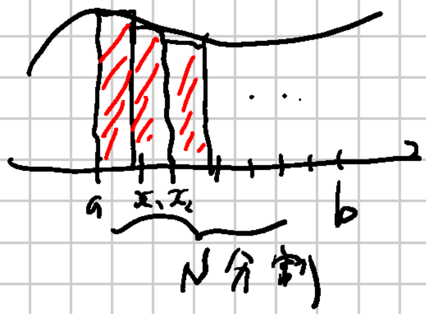


$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i$$

$$(i = 1 \cdots N)$$



部分積分

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\text{微分} \longleftrightarrow \text{積分}$$

不定積分 $\quad f(x) = \dfrac{dF}{dx}$

$$\int^x f(x)\,dx = F(x)$$

不定積分を知っていれば定積分可能

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{dF}{dx}\,dx = F(b) - F(a)$$

積分変数の変更

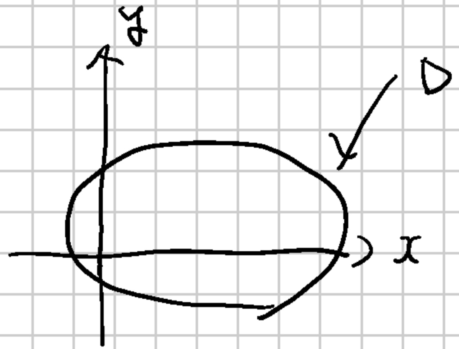
$x = \varphi(t)$ ： φ は t について単調増加（減少）

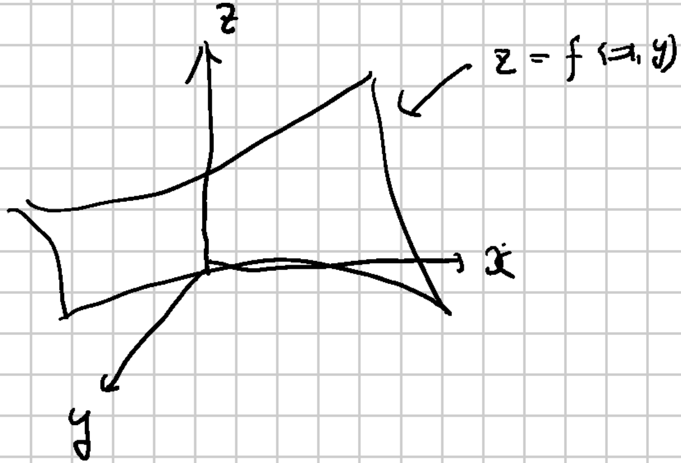
$\varphi(t_0) = a$, $\varphi(t_1) = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

2変数関数の積分 (累次積分)

$z = f(x, y)$





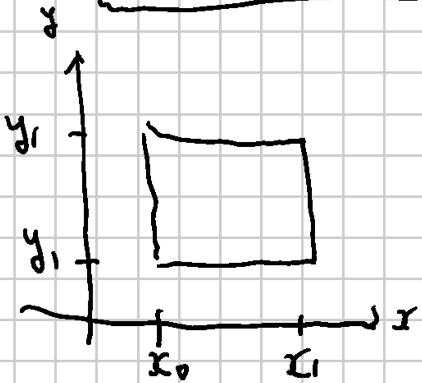
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

$z = f(x, y)$ 曲面と
x-y 平面内の領域Dで
囲れた3次元領域へ
体積

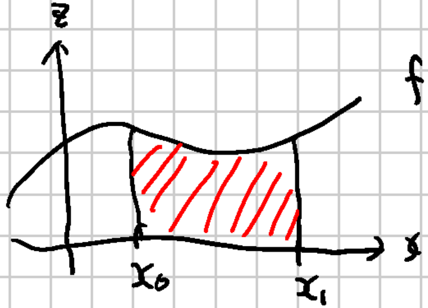
累次積分

長方形D上の積分

$$\underbrace{\int_{y_0}^{y_1} \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx}_{y\text{を定数として}x\text{で積分}}\,dy}_{y\text{について積分}}$$



① y を $[y_0, y_1]$ 内の一点 y_* に固定して x 積分



$f(x, y_*)$ ← 一変数関数とみなす.

各 y_* に対して対応する面積が得られた $S(y_*)$

② $S(y)$ を $[y_0, y_1]$ 積分

$$\int_{y_0}^{y_1} S(y)\, dy \quad \Leftrightarrow \text{体積を与える}$$

$$x_0 \leq x \leq x_1$$

$$y_0 \leq y \leq y_1$$

$$0 \leq z \leq f(x, y)$$

累次積分の順番は入れかえられる

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy\, dx$$

練習

$$f(x, y) = x^n y^m$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^n y^m \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^m}{n+1} \, dy = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \quad //$$

$$\frac{y^m}{n+1} = S(y)$$

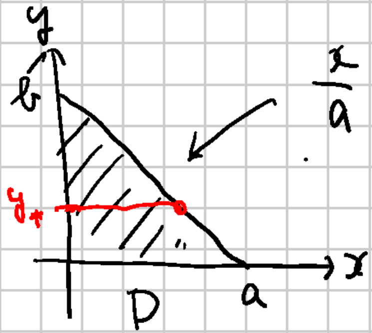
・内側の積分実行

yを定数と考えてxで積分

$$x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)$$

積分領域がより複雑な場合

例）角錐の体積



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$y = y_*$

$$x = a\left(1 - \frac{y_*}{b}\right)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$\int_0^b \underbrace{\int_0^{a(1-\frac{y}{b})} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dx}\, dy$$

$$= \int_0^b \left\{ c\left(1 - \frac{y}{b}\right) x \Big|_0^{a(1-\frac{y}{b})} - \frac{c}{2a} x^2 \Big|_0^{a(1-\frac{y}{b})} \right\} dy$$

$$= \int_0^b \left(ac\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{c}{2\cancel{a}} a^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b ac\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 dy = (*)$$

積分変数の変更　$t = 1 - \frac{y}{b}$ とおく

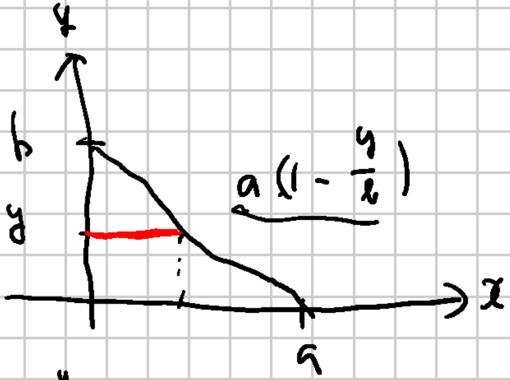
$$y = b(1-t) = \varphi(t)$$

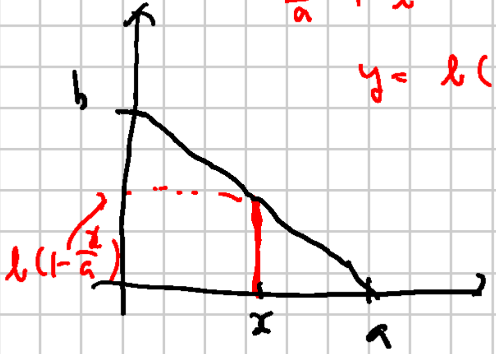
$$\varphi(0) = b, \quad \varphi(1) = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -b$$

$$\int_0^b dy \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 = \int_0^1 b\, t^2\, dt = \frac{b}{3}$$

$$(*) = \frac{ac}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{abc}{6} \quad /\!/$$

積分順序の変更：やや注意が必要



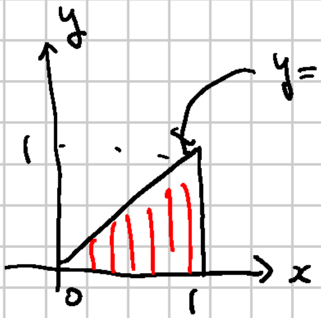


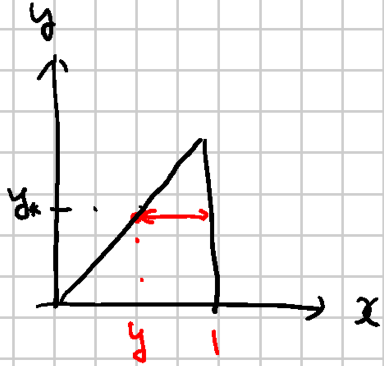
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

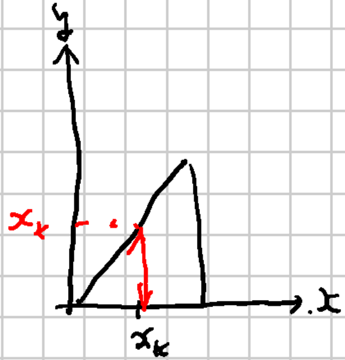
$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$\int_0^b \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} f(x,y)\, dy\, dx$$

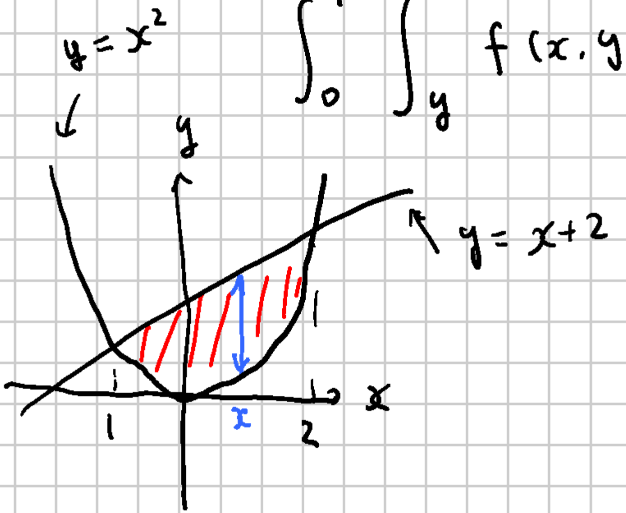
積分順序の変更例



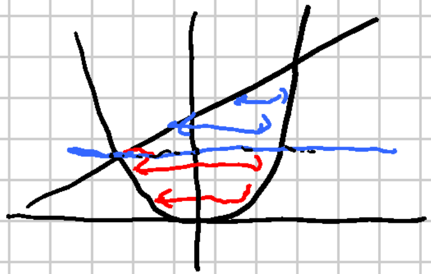




$$\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$$



$$\int_1^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx$$



$$\parallel$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$+ \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

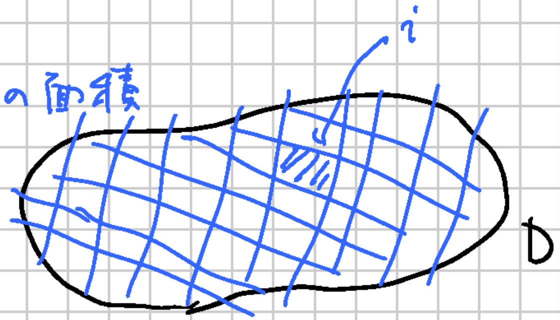
重積分

積分領域をNコの小さな領域に細分

i番目の小領域の面積

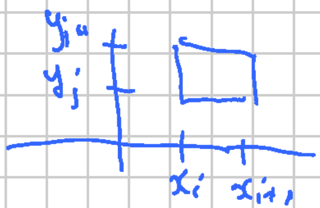
ΔS_i

$i = 1 \sim N$



$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$$

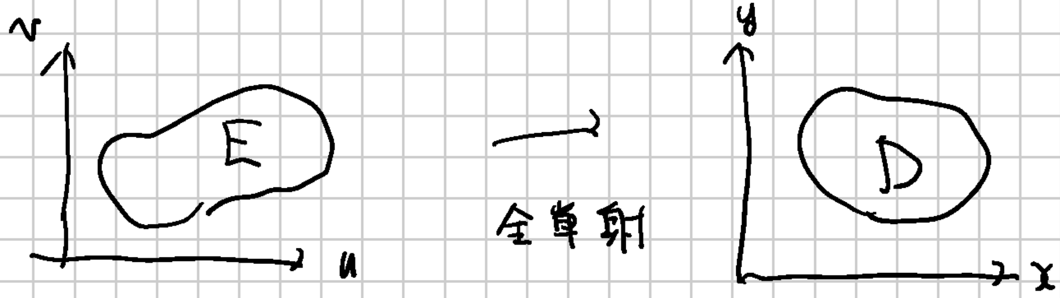
⇒ 体積をあらわすので累次積分と結果は同じ



(重積分における)積分変数の変換公式

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ と変数変換



公式

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))\, |J(u, v)|\, du\, dv$$

$$J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ヤコビアン

$\left(\leftarrow \frac{dy}{dt}\right)$ 一変数

考え方

$u \sim u+\Delta u \ , \quad v \sim v+\Delta v$

$$\Delta x = x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u,v)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$$

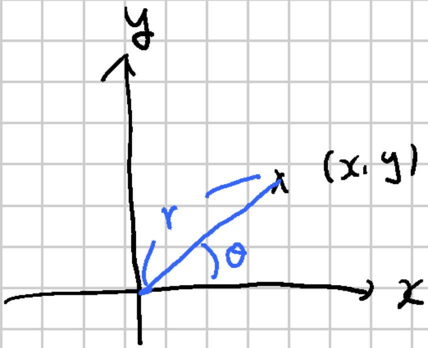
$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

$$\Downarrow$$

平行四辺形の面積

$$\boxed{\Delta x \Delta y = J(u,v)\Delta u \Delta v}$$

変数変換の例：極座標



x, y のかわりに r, θ を用いることができる

(r, θ) 極座標

$$x = r\cos\theta , \quad y = r\sin\theta$$

Jacobian $\quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}$

$$= \cos\theta \cdot (r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta$$

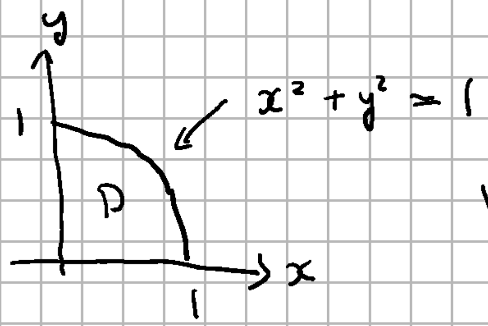
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta}$$

例）球の体積

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

$x, y, z \geq 0$ で積分して8倍すればよい



$$V = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\text{高さ}}\, dx\, dy$$

積分変数 $x, y \to r, \theta$ $\quad x^2+y^2=r^2$

$$V = 8\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2} \cdot r \, d\theta\, dr$$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr \qquad t = r^2$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-t}\, dt \qquad dt = 2r\,dr$$

$$= \frac{4\pi}{3} \quad //$$