# ラグランジュ (Lagrange) 未定乗数法

束縛条件 $g(x,y)=0$ のもとで，$f(x,y)$ が最大値となる点 $(a,b)$ を求める問題を考えてみよう．

そのためには，新たな変数 $\lambda$（ラグランジュ乗数）を導入して，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

を考える．

点 $(a,b)$ で $\partial g/\partial x\neq 0$，$\partial g/\partial y\neq 0$ ならば，

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

により $\lambda$ および最大値を与える点 $(a,b)$ が決まる．

第1の条件 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ は，$f$ と $g$ の勾配ベクトルが並行であるという条件である．

## 問題

$$f(x,y)=(x+y)^2$$

$$g(x,y)=x^2+y^2-1$$

として，束縛条件 $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

解

### Step 1

まず最初に $f(x,y)$ の様子および束縛条件 $g(x,y)=0$ がどのようなものか見なさい．

```
syms x y lambda f(x,y) g(x,y)
% maxmize
f(x,y) = (x+y)^2;
% subject to
g(x,y) = x^2 + y^2 - 1;
%
fc=fcontour(f,[-1.1 1.1 -1.1 1.1]);grid on
fc.LevelList = [5 4 3 2 1 0.5 0.0001];
fc.LineWidth=2
```

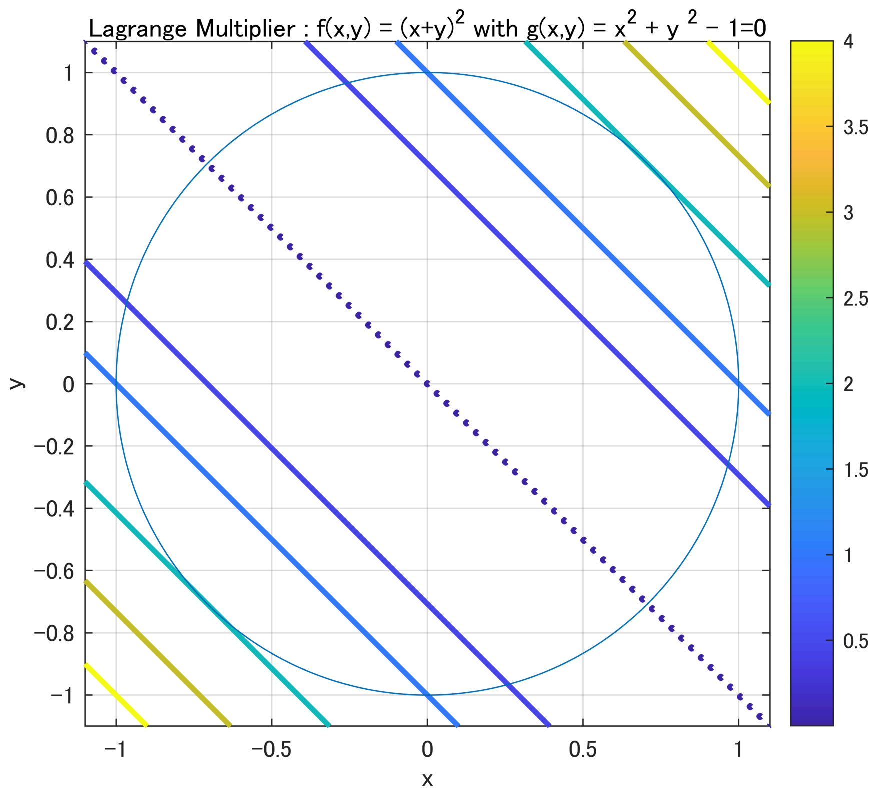
```
fc = 
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: [1×1 symfun]
       XRange: [-1.1000 1.1000]
       YRange: [-1.1000 1.1000]
    LineColor: 'flat'
    LineStyle: '-'
    LineWidth: 2
         Fill: off
```

```
LevelList: [5 4 3 2 1 0.5000 1.0000e-04]
```

すべてのプロパティ を表示

```
hold on
fimplicit(g)
colorbar
daspect([1 1 1])
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Lagrange Multiplier : f(x,y) = (x+y)^2 with g(x,y) = x^2 + y ^2 - 1=0')
```




これでどのあたりにどんな解があるか大体見当がつく.

fc=… , fc.… =　では等高線の値や幅をコントロールしている.

$f(x,y)$ の等高線（直線）と束縛条件 $g(x,y)=0$ （半径1の円）が並行で接している処が解（最大値）である.

### Step 2

次に問題を定式化する.

```
syms L
L(x,y,lambda) = f - lambda*g;
eqn1 = diff(L,x) == 0;
eqn2 = diff(L,y) == 0;
eqn3 = diff(L,lambda) == 0;
```

これで最適化する関数 L と条件が定義された.

diff は微分. それぞれ何で（偏）微分するかもわかる.

**Step 3**

上の3つの条件を用いて, 手でこれらを解くことも難しくはない（問題1）.

```
ss = solve([eqn1,eqn2,eqn3],[x,y,lambda]);
```

これにより問題の解が求められたはず.

```
ss.x
```

ans =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

```
ss.y
```

ans =

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

```
ss.lambda
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これらが解であるが, どう ss に納められているかは上から想像がつくであろう.

```
f(ss.x,ss.y)
```



```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

関数 $f(x, y)$ の値は直接計算する．

```
T = table(double(ss.x),double(ss.y),double(ss.lambda),double(f(ss.x,ss.y)));
T.Properties.VariableUnits = {'x','y','lambda','f'}
```

T = 4×4 table

| | Var1 | Var2 | Var3 | Var4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.7071 | -0.7071 | 0 | 0 |
| 2 | -0.7071 | 0.7071 | 0 | 0 |
| 3 | -0.7071 | -0.7071 | 2 | 2 |
| 4 | 0.7071 | 0.7071 | 2 | 2 |

4つの最適解（最大値または最小値）があり，それらはこの表を横に x, y, lambda, f(x,y) と並ぶ．

後ろの2つが $f(x, y)$ の最大値，前の2つが $f(x, y)$ の最小値に対応する．

## 問題1

先の問題をプログラムを用いずに手計算で解け．

## 問題2

$f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

として，束縛条件 $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ の最大値を求めよ．

```
syms x y lambda f(x,y) g(x,y)
% maxmize
f(x,y) = x.*y;
% subject to
g(x,y) = x^2 + y^2 - 1;
%
fc=fcontour(f,[-1.1 1.1 -1.1 1.1]);grid on
fc.LevelList = [5 4 3 2 1 0.5 0.3 0.2 0.1 0 -0.1 -0.2 -0.3 -0.5 -1 -2];
fc.LineWidth=2
```

```
fc = 
  FunctionContour のプロパティ:

     Function: [1×1 symfun]
       XRange: [-1.1000 1.1000]
```

```
    YRange: [-1.1000 1.1000]
 LineColor: 'flat'
 LineStyle: '-'
 LineWidth: 2
      Fill: off
 LevelList: [5 4 3 2 1 0.5000 0.3000 0.2000 0.1000 0 -0.1000 -0.2000 -0.3000 -0.5000 -1 -2]
```

すべてのプロパティ を表示

```
hold on
fimplicit(g)
colorbar
daspect([1 1 1])
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Lagrange Multiplier : f(x,y) = xy with g(x,y) = x^2 + y ^2 - 1=0')
```