

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



線形計画法

線形計画問題とは、目的関数と制約条件がすべて変数について線形の最適化問題のことをいう。

変数が2つの場合に一般的に書けば、

不等式条件

$$a_{11}x + a_{12}y \leq b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$$

の制約 (2次元空間内で (x, y) の許容領域を決める) の下で

$$f(x, y) = c_1x + c_2y$$

の最大値およびそのときの x, y を求める問題である。

目的関数が線形なので、局所的な解は大域的な意味でも最適解になる。

さらに目的関数も線形であるから、最適解は (x, y) 平面内の凸多角体の境界上に存在するはずである。

$$4x+2y<30$$

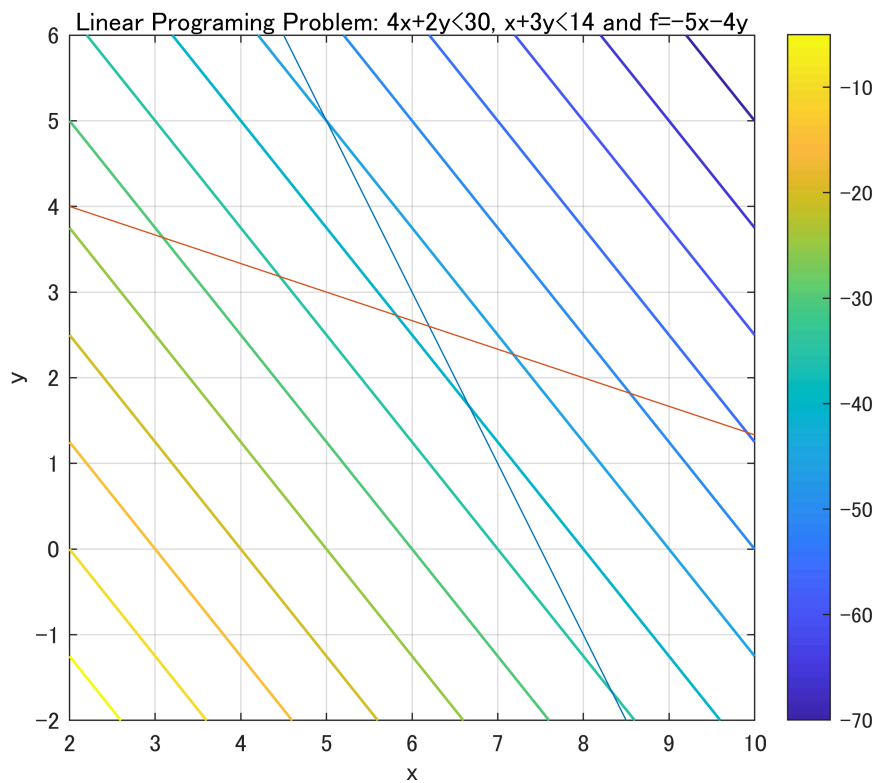
$$x+3y<14$$

$$f= -5x-4y$$

Step 1

まず解の見当を付けるために (x, y) 平面 で評価関数 $f(x, y)$ の等高線図を描き、そこでの制限条件を加える。

```
% plot the figure
A=[4 2;1 3]; b=[30;14];f=[-5 -4];
fc=fcontour(@(x,y)f(1,1)*x+f(1,2)*y,[2 10 -2 6]);grid on
fc.LevelList = [5 0.00001 -5 -10 -15 -20 -25 -30 -35 -40 -45 -50 -55 -60 -65 -70];
fc.LineWidth=1;
hold on;fimplicit(@(x,y) A(1,1)*x+A(1,2)*y-b(1),[2 10 -2 6])
hold on;fimplicit(@(x,y) A(2,1)*x+A(2,2)*y-b(2),[2 10 -2 6])
colorbar
daspect([1 1 1])
%
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Linear Programing Problem: 4x+2y<30, x+3y<14 and f=-5x-4y')
hold on
```



これでおおよその見当は付いたと思う。(実際には先回りをして、 $f = -207/5$ の等高線も加えてある。)

評価関数が線形なので、等高線は等間隔の直線となる。制限領域を示す2つの境界線(直線)も加えた。最適解が境界上にあるという意味も分かると思う。

Step 2

実際の解を求めよう。すべての式は線形なので、行列形式で書くのが便利である。

評価関数を

$$fx$$

条件式の境界を

$$Ax = b$$

と書く。ここで A は

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

という 2×2 行列, x, b は2成分縦ベクトル(2×1 行列), f は2成分横ベクトル(1×2 行列) と定義する;

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad f = (-5 \quad -4)$$

```
A=[4 2;1 3]; b=[30;14];f=[-5 -4]
```

```
f = 1×2  
    -5    -4
```

この線形計画問題にはプログラム (サブプログラム) linprog が用意されているので, これを使う.

```
x=linprog(f,A,b) % x is the point of the solution
```

最適解が見つかりました。

```
x = 2×1  
    6.2000  
    2.6000
```

最適解は直接 f^* を計算する.

```
Sol=f*x
```

```
Sol = -41.4000
```

最適解が求まったら, 図に $f(x,y) = -207/5$ およびその場所も書き込むと便利である.

```
fc.LevelList = [5 0.00001 -5 -10 -15 -20 -25 -30 -35 -40 -45 -50 -55 -60 -65 -70 -207/5]
```

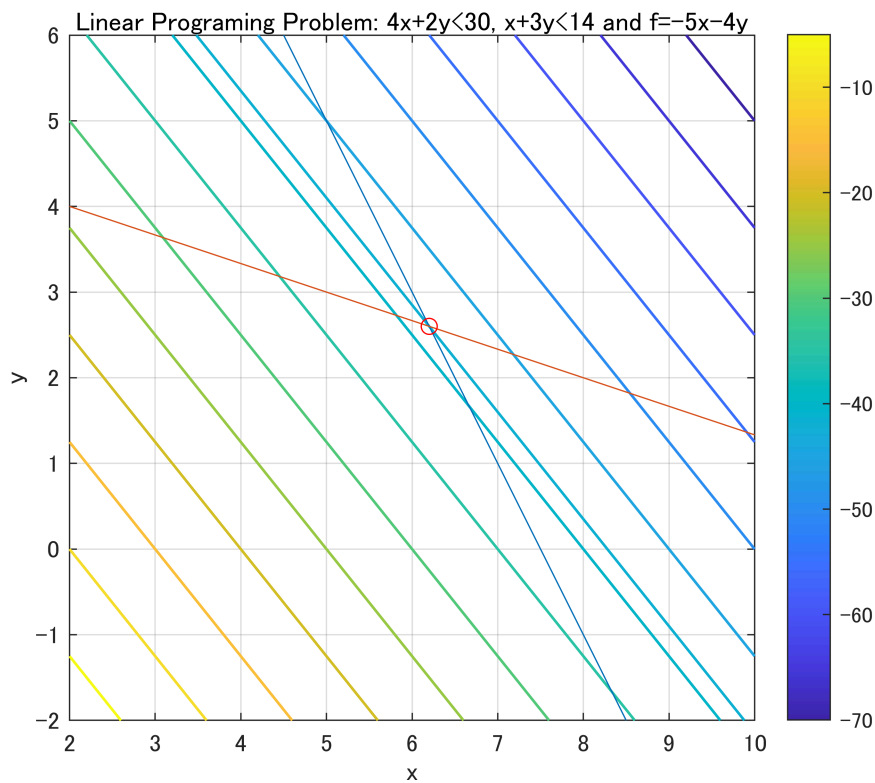
```
fc =
```

FunctionContour のプロパティ:

```
Function: @(x,y)f(1,1)*x+f(1,2)*y  
XRange: [2 10]  
YRange: [-2 6]  
LineColor: 'flat'  
LineStyle: '-'  
LineWidth: 1  
Fill: off  
LevelList: [5 1.0000e-05 -5 -10 -15 -20 -25 -30 -35 -40 -45 -50 -55 -60 -65 -70 -41.4000]
```

すべてのプロパティ を表示

```
plot(x(1),x(2),'ro');hold off
```



線形計画法の解法には様々なものがある．ここで与えられたサブプログラムでは問題を解析して効率の良い解法を選んでいる．

最も標準的（不等式制約条件下）なものは単体法（Simplex Method）といって，許容領域の境界で最適解を探す方法である．

これは線形問題の特徴をよく捉えた解法である．

制約条件に等式が混ざる問題もある．詳しくは，MATLABのon-lineマニュアルで

linprog

の説明を見てほしい．

問題

制約条件

$$5x + 2y + 7z \leq 30$$

$$7x + 8y + 12z \geq 14$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

の下で，

$$f = 5x + 4y + 3z$$

の最大化を考えよ.