クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

第９講　条件付き極値問題

定義

制約関数が一次関数の場合

一般の場合：陰関数定理を用いた解法

　変数の数が一般の場合の陰関数定理

ラグランジ未定定数法

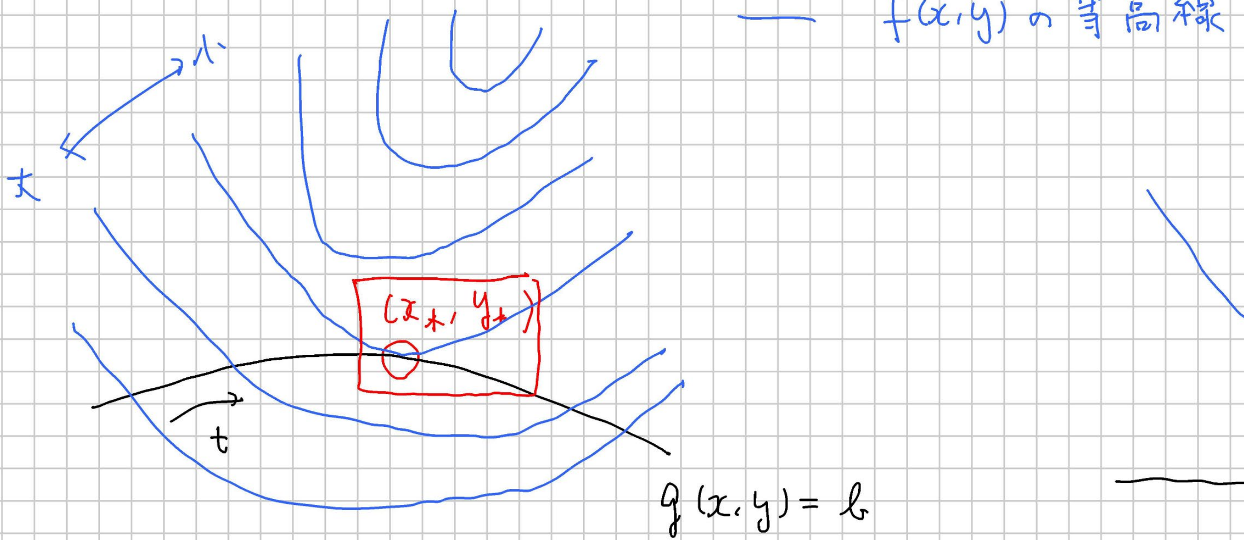
ラグランジ乗数の意味

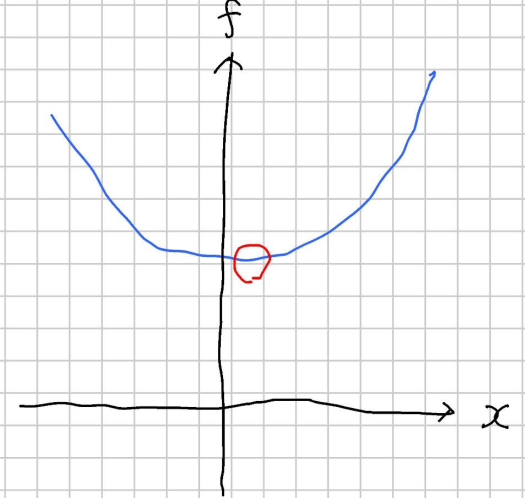
条件付き 極値問題とは？

制約条件 $g(x, y) = b$ （b は定数）の下で

目的関数 $f(x, y)$ を 最小化（最大化）するような (x_*, y_*)

を求める.





まずは g が線形関数の場合に解く.

$$g(x,y) = cx + dy = b \qquad \text{制約条件}$$

$d \neq 0$ と仮定 $\quad y = \dfrac{b-cx}{d}$

これを目的関数に代入 $\quad F(x) = f\left(x, \dfrac{b-cx}{d}\right)$

目的関数の最小(大)化 $\quad \dfrac{dF}{dx} = 0$

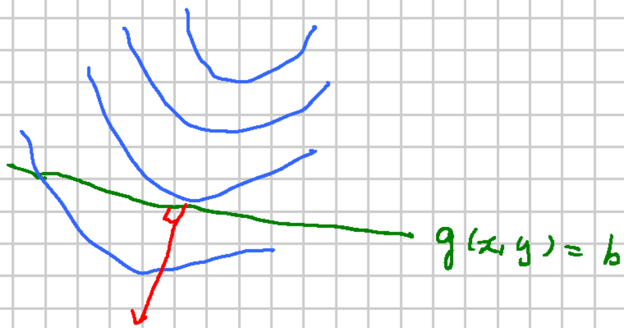
合成関数の微分公式

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b-cx}{d}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{c}{d}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

勾配ベクトル $\quad \nabla f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}\right], \quad \nabla g = \left[\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}\right] = [c, d]$

$$\boxed{\nabla f \parallel \nabla g}$$

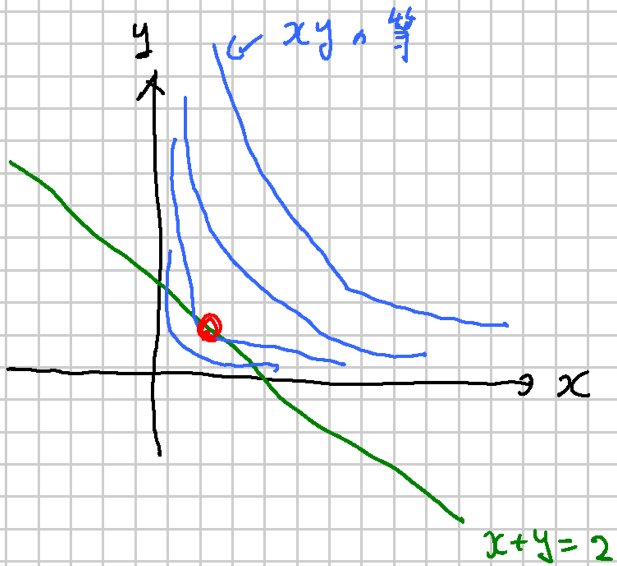


例） 制約条件 $x+y=2$ この条件の下で $f(x,y)=xy$ を最大化

制約条件を解く $y=2-x$ $F(x)=f(x,2-x)=x(2-x)$

$$\frac{dF}{dx}=2-2x=0 \qquad x_*=1,\ y_*=1 \qquad f(x_*,y_*)=1$$

最大値



勾配ベクトルが平行 $\nabla g=(1,1)$, $\nabla f=(y,x)$

$\nabla f \parallel \nabla g \iff y=x \qquad g=2 \to 2x=2 \qquad x_*=1$

制約条件　一般の関数　$g(x,y)=b$　$f(x,y)$

$g(x,y)=b$ を解いて　$y=h(x)$，　$g(x,h(x))=b$

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$ 陰関数微分公式

$F(x)=f(x,h(x))$ と書ける

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$\nabla f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right],\quad \nabla g=\left[\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right]$$

$$\boxed{\nabla f \mathbin{/\!/} \nabla g}$$

$f \longleftrightarrow g$

制約条件　$g(x,y)=b$　目的関数 f

〃　$f(x,y)=a$　目的関数 g

双対問題

多変数化　$g(x_1, \cdots, x_n) = b$ という条件の下で

目的関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を最大(小)化

$(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ の点においては　二つの関数の勾配ベクトル

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$$\nabla g = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]$$

$$\boxed{\nabla f \parallel \nabla g}$$

$$g(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \qquad a_n \neq 0 \qquad x_n = \frac{b - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i}{a_n}$$

$$F(x_1, \cdots, x_{n-1}) = f\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, \frac{b - \sum^{n-1} a_i x_i}{a_n}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{a_i}{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

$$\frac{1}{a_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{a_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (i=1,\cdots,n-1) \Rightarrow \vec{a} = \nabla g \parallel \nabla f$$

ラグランジュ未定乗数法

制約　$g(x, y) = b$

目的　$f(x, y)$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b)$$ ：ラグランジュ関数

制約付き極値問題 $\Longleftrightarrow$ $F(x, y, \lambda)$ の極値問題

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

具体的に計算

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = \lambda \left[\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}\right] \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x, y) + b = 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$$

$\leftarrow$ 制約条件

未定乗数法の利点

多変数化も容易

$\vec{x}$: 変数 n コ

制約条件 $g(\vec{x}) = b$

目的関数 $f(\vec{x})$

未定乗数法 $F(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda(g(\vec{x}) - b)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, \cdots, n) \quad \leftarrow \quad \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(g(\vec{x}) - b) = 0 \qquad \text{制約条件}$$

さらに一般化

制約条件 $g_j(\vec{x}) = b_j \quad (j = 1, \cdots, m)$

$$F = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\vec{x}) - b_j)$$

極値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 & \Leftarrow \nabla f = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j} = -(g_j(\vec{x}) - b_j) = 0 & \leftarrow \text{制約条件} \end{cases}$$

未定乗数 λ の意味

$g(x,y)=b$ という条件の下で f を最小(大)化

$$f(x_*,y_*)=\underline{l(b)}$$

$$\boxed{\frac{dl}{db}=\lambda}$$:「潜在価値」と呼ばれる.

∵ $g(x,y)=b$ 条件下 (x_*,y_*)

$g(x,y)=b'$ 条件下 (x_*',y_*')

Lagrange 未定乗数法により $\nabla f=\lambda\nabla g$

$$l(b')-l(b)=f(x_*',y_*')-f(x_*,y_*)$$ ← Taylor 展開

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_*'-x_*)+\frac{\partial f}{\partial y}(y_*'-y_*)$$

$$= \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_*' - x_*) + \frac{\partial g}{\partial y}(y_*' - y_*) \right)$$

$\}$ Taylor 展開

$$= \lambda \left(g(x_*', y_*') - g(x_*, y_*) \right)$$

$$= \lambda \ (b' - b)$$

$$\lim_{b' \to b} \frac{l(b') - l(b)}{b' - b} = \frac{dl}{db} = \lambda \quad //$$

多変数化 $(x_1 \cdots x_n) = \vec{x}$

$$g_j(\vec{x}) = b_j \quad (j = 1 \sim m)$$

$$\lambda_j : \quad j = 1 \sim m)$$

$$\boxed{\frac{\partial l(\vec{b})}{\partial b_j} = \lambda_j}$$