

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ  
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



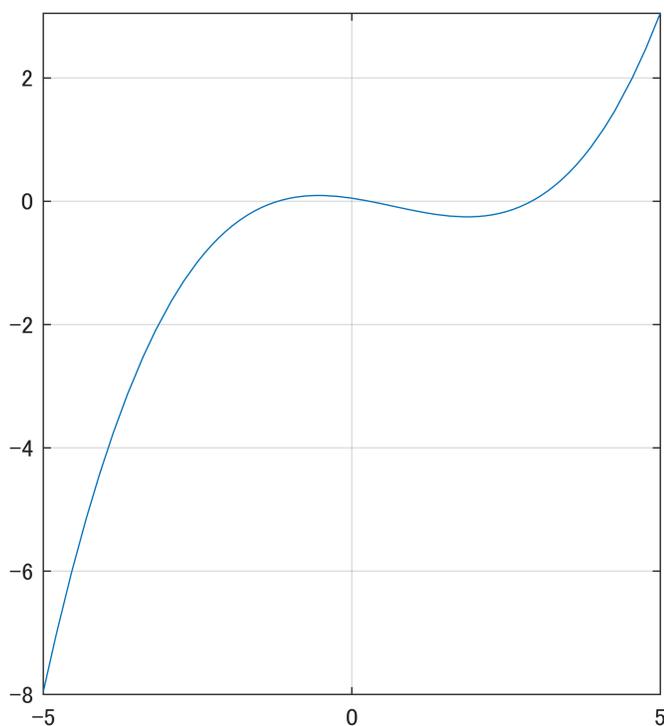
# 接平面と法線ベクトル

## 一変数の場合の接線と法線ベクトル

```
syms x  
f(x) = (x^3 - 2*x^2 - 3*x + 1) / 20
```

```
f(x) =  
 $\frac{1}{20} - \frac{3x}{20} - \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{20}$ 
```

```
fplot(f)  
daspect([1 1 1])  
grid on
```



$x = -1$  における接線

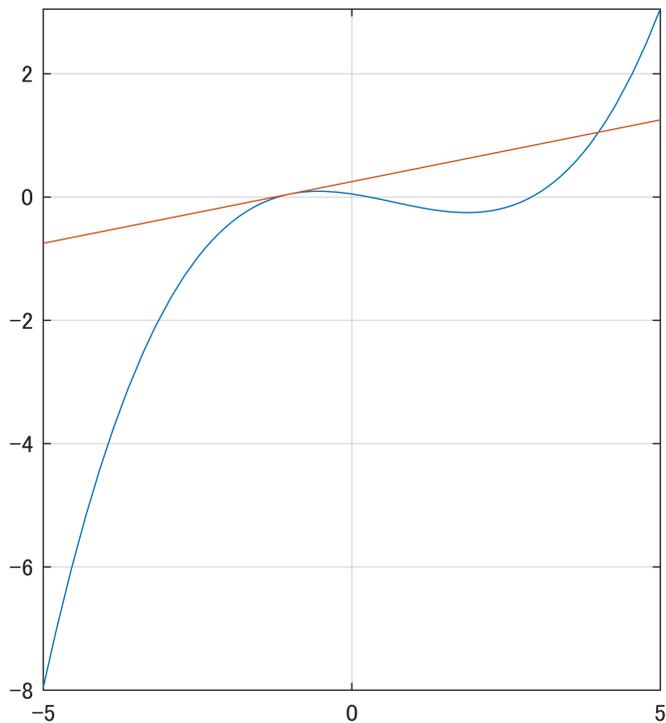
$$y = f_x(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

```
dfdx(x) = diff(f(x))
```

```
dfdx(x) =  
 $-\frac{3}{20} - \frac{x}{5} + \frac{3x^2}{20}$ 
```

```
x0 = -1;
```

```
fplot(f(x))
hold on
fplot(f(x0) + dfdx(x0) * (x-x0))
hold off
daspect([1 1 1])
grid on
```



$x = -1$  における法線ベクトル

```
dfdx(x0)
```

```
ans =
```

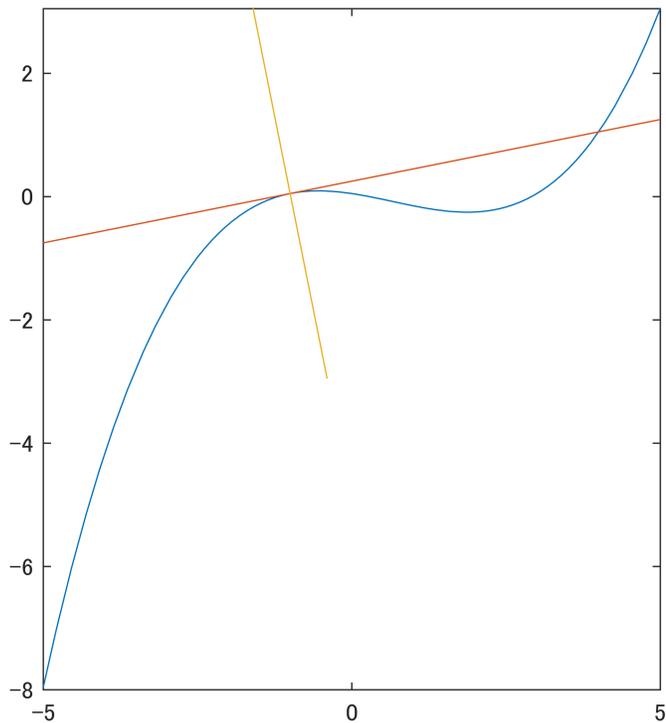
$$\frac{1}{5}$$

から  $\vec{n} = [1/5, -1]$

$[x, y] = [-1, f(-1)]$  を通り法線ベクトルに並行な直線

```
t = linspace(-3, 3);
xn = x0 + dfdx(x0) * t;
yn = f(x0) - t;
fplot(f(x))
hold on
fplot(f(x0) + dfdx(x0) * (x-x0))
```

```
plot(xn, yn)
hold off
daspect([1 1 1])
```



接線と法線ベクトルは直交

### 練習問題

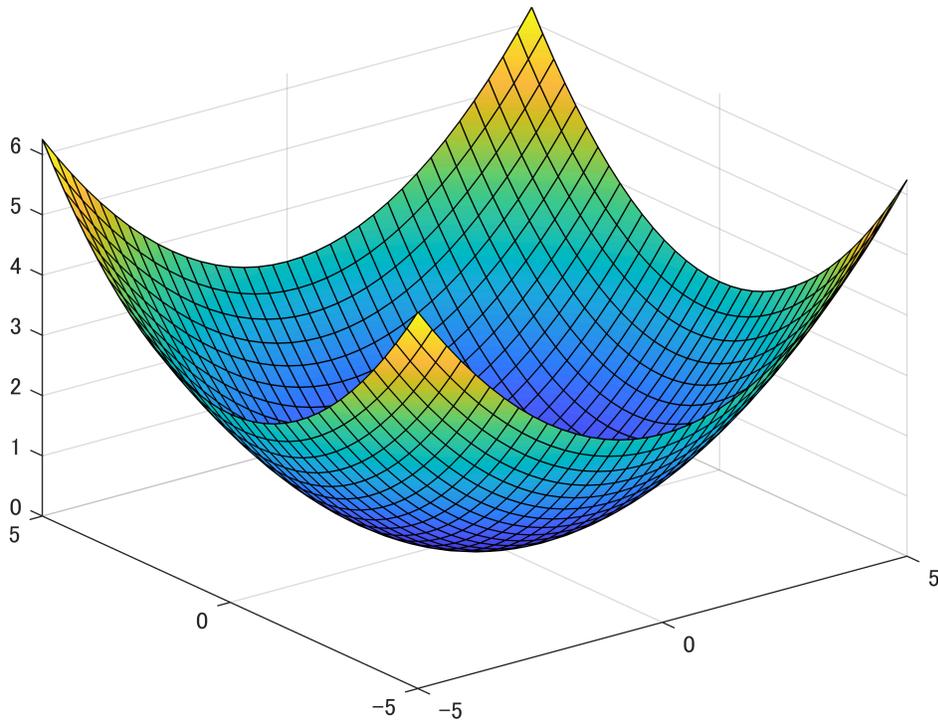
$y = f(x) = 1/x$  の  $x = 2$  における接線と法線を求めプロットせよ

二変数の場合の接平面と法線ベクトル

関数  $f(x, y) = (x^2 + y^2)/8$

陰関数表示  $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

```
syms x y
f(x, y) = (x^2 + y^2) / 8;
fsurf(f)
```



$(x, y) = (2, 1)$  における偏微分

$$\text{dfdx}(x, y) = \text{diff}(f(x,y), x)$$

$$\text{dfdx}(x, y) =$$

$$\frac{x}{4}$$

$$\text{dfdy}(x, y) = \text{diff}(f(x,y), y)$$

$$\text{dfdy}(x, y) =$$

$$\frac{y}{4}$$

$$\begin{aligned} x0 &= 2; \\ y0 &= 1; \\ \text{dfdx}(x0, y0) \end{aligned}$$

$$\text{ans} =$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\text{dfdy}(x0, y0)$$

$$\text{ans} =$$

$\frac{1}{4}$

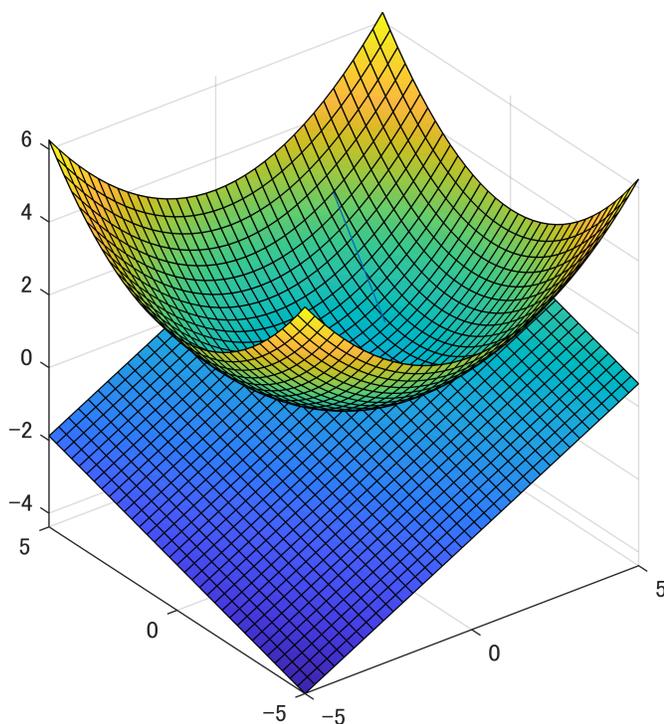
から  $\vec{n} = [0.5, 0.25, -1]$   
接平面と法線

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + dfdx(x_0, y_0) * (x - x_0) + dfdy(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

$g(x, y) =$

$$-\frac{5}{8} + \frac{y}{4} + \frac{x}{2}$$

```
t = linspace(-5, 5);
xn = x0 + dfdx(x0, y0) * t;
yn = y0 + dfdy(x0, y0) * t;
zn = f(x0, y0) - t;
fsurf(f)
hold on
fsurf(g)
plot3(xn, yn, zn)
hold off
daspect([1 1 1])
```



注: MATLAB Mobile で図を自由に回転出来ない場合には "view([4.8 -11.3])" を実行してみよ

## ニュートン法により極小点(極大点)を求める

一変数関数  $y = f(x)$  の場合

ある点  $x = x_0$  のまわりでテイラー展開

$$y(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

極小(極大)点では微分がゼロ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = 0 \rightarrow x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \text{ を繰り返すと極小点(極大点)に収束する}$$

## 多変数関数の最適化に対するニュートン法

$z = f(x, y)$  の極小点(極大点)を求める

ある点  $(x, y) = (x_0, y_0)$  のまわりでテイラー展開

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

極小(極大)点では  $f_x = f_y = 0$

$$f_x = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{xy}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$f_y = f_y(x_0, y_0) + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

行列形式で書くと

$$\nabla f(\vec{x}_0) - H(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

ここで  $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$  (ヘッセ行列). よって、 $\vec{x} = \vec{x}_0 - H^{-1}\nabla f(\vec{x}_0)$  を繰り返すと極小点(極大点)に収束する

## 勾配降下法

ニュートン法ではヘッセ行列の逆行列を求める(あるいは連立一次方程式を解く)必要がある

方程式を解くかわりに、勾配の逆方向に少しずつ進む(勾配降下法)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - \epsilon \nabla f(\vec{x}_0)$$

$\epsilon$  は小さな定数

例題) 二変数関数  $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  の極小値を勾配降下法でもとめよ