接平面と法線ベクトル

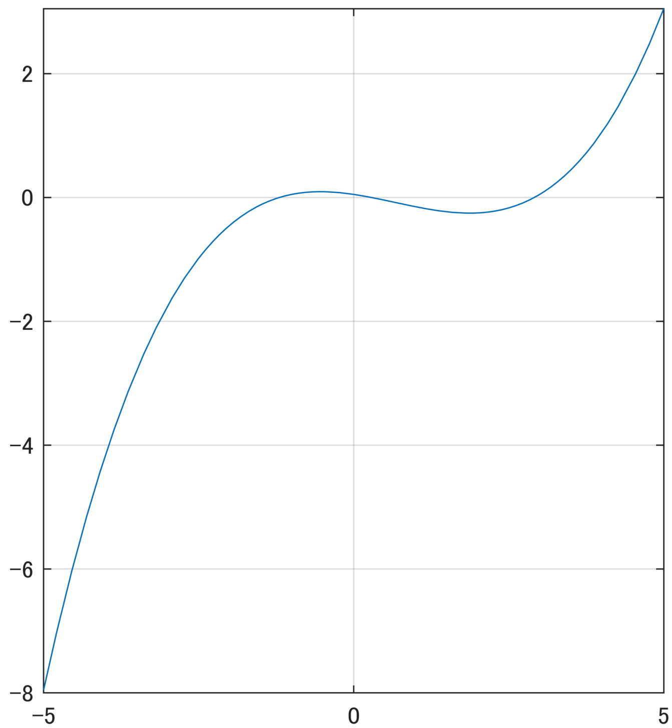
一変数の場合の接線と法線ベクトル

```
syms x
f(x) = (x^3 - 2*x^2 - 3*x + 1) / 20
```

f(x) =

$$\frac{1}{20}-\frac{3\,x}{20}-\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{20}$$

```
fplot(f)
daspect([1 1 1])
grid on
```



$x=-1$ における接線

$$y=f_x(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

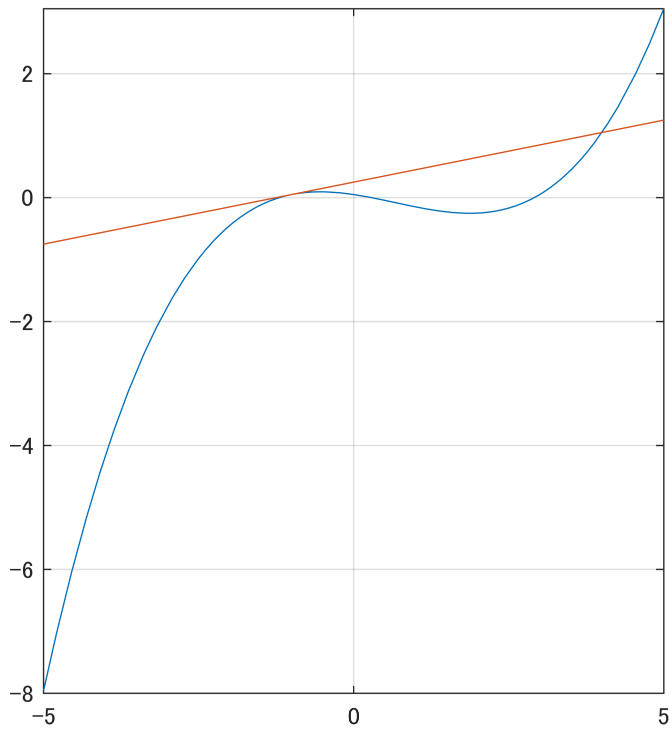
```
dfdx(x) = diff(f(x))
```

dfdx(x) =

$$-\frac{3}{20}-\frac{x}{5}+\frac{3\,x^2}{20}$$

```
x0 = -1;
```

```
fplot(f(x))
hold on
fplot(f(x0) + dfdx(x0) * (x-x0))
hold off
daspect([1 1 1])
grid on
```



$x = -1$ における法線ベクトル

```
dfdx(x0)
```

ans =

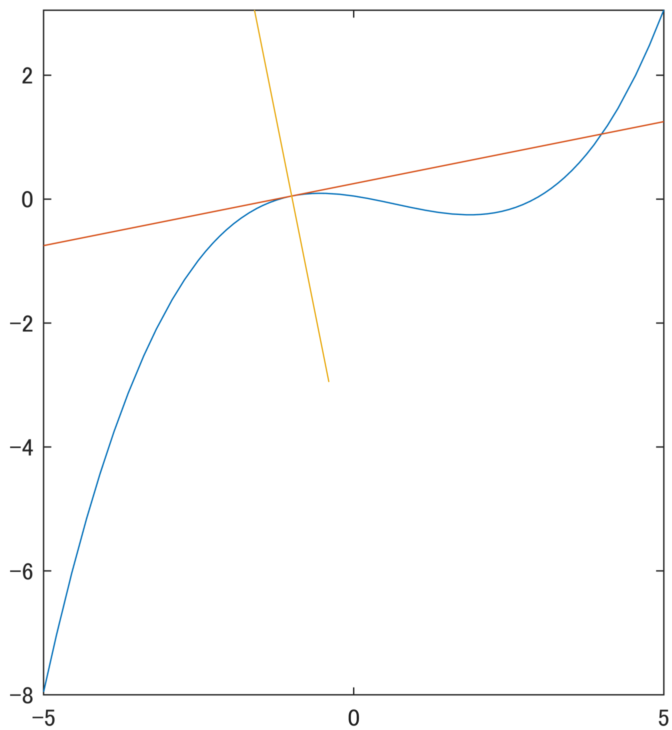
$\frac{1}{5}$

から $\vec{n} = [1/5, -1]$

$[x, y] = [-1, f(-1)]$ を通り法線ベクトルに並行な直線

```
t = linspace(-3, 3);
xn = x0 + dfdx(x0) * t;
yn = f(x0) - t;
fplot(f(x))
hold on
fplot(f(x0) + dfdx(x0) * (x-x0))
```

```
plot(xn, yn)
hold off
daspect([1 1 1])
```



接線と法線ベクトルは直交

練習問題

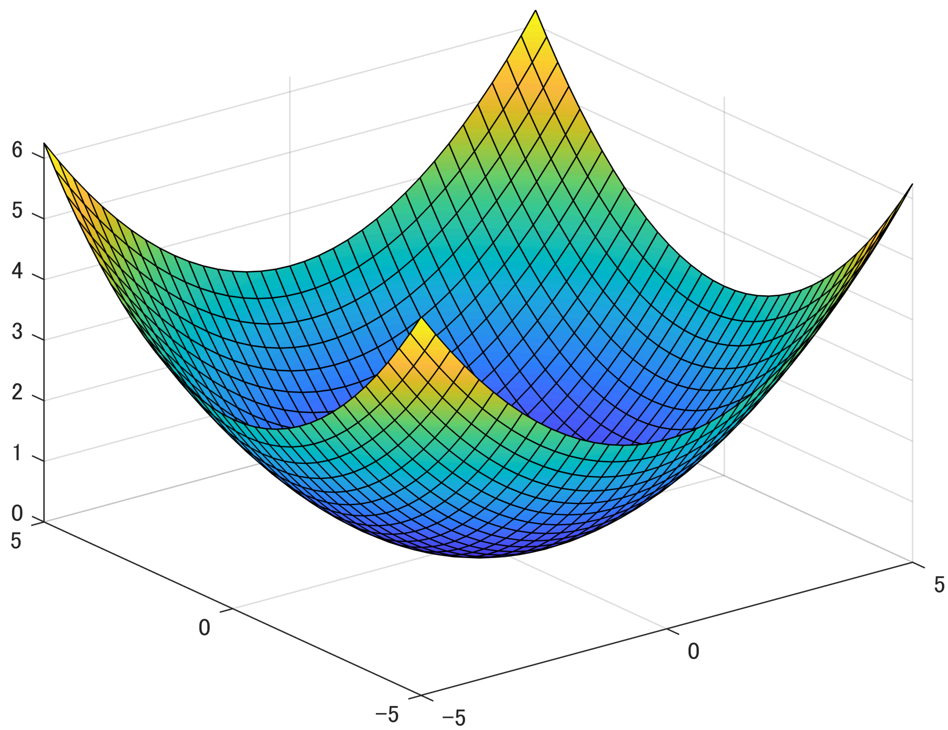
$y = f(x) = 1/x$ の $x = 2$ における接線と法線を求めプロットせよ

二変数の場合の接平面と法線ベクトル

関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)/8$

陰関数表示 $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

```
syms x y
f(x, y) = (x^2 + y^2) / 8;
fsurf(f)
```

$(x, y) = (2, 1)$ における偏微分

```
dfdx(x, y) = diff(f(x,y), x)
```

```
dfdx(x, y) =
```

$\frac{x}{4}$

```
dfdy(x, y) = diff(f(x,y), y)
```

```
dfdy(x, y) =
```

$\frac{y}{4}$

```
x0 = 2;
y0 = 1;
dfdx(x0, y0)
```

```
ans =
```

$\frac{1}{2}$

```
dfdy(x0, y0)
```

```
ans =
```

$\frac{1}{4}$

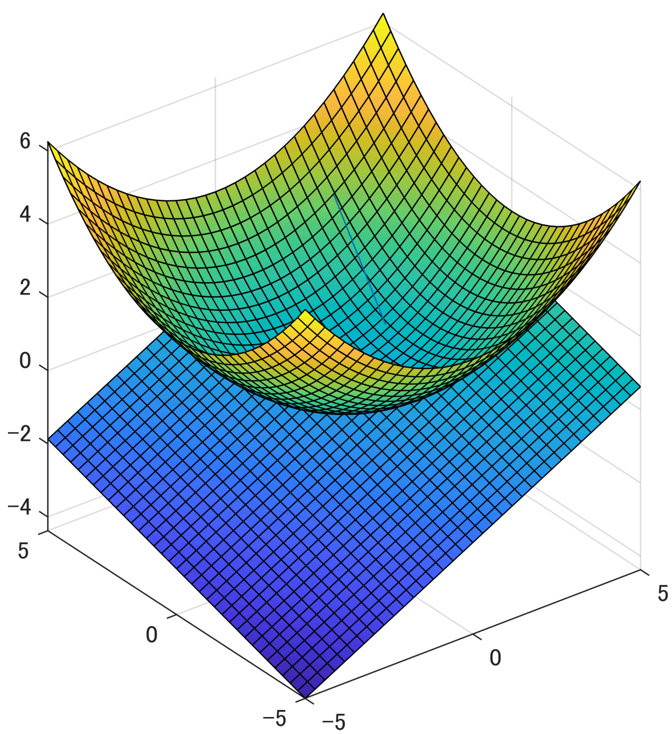
$\vec{n} = [0.5, 0.25, -1]$
から
接平面と法線

```
g(x, y) = f(x0, y0) + dfdx(x0, y0) * (x - x0) + dfdy(x0, y0) * (y - y0)
```

g(x, y) =

$-\frac{5}{8} + \frac{y}{4} + \frac{x}{2}$

```
t = linspace(-5, 5);
xn = x0 + dfdx(x0, y0) * t;
yn = y0 + dfdy(x0, y0) * t;
zn = f(x0,y0) - t;
fsurf(f)
hold on
fsurf(g)
plot3(xn, yn, zn)
hold off
daspect([1 1 1])
```



注：MATLAB Mobile で図を自由に回転出来ない場合には "view([4.8 -11.3])" を実行してみよ

ニュートン法により極小点(極大点)を求める

一変数関数 $y = f(x)$ の場合

ある点 $x = x_0$ のまわりでテイラー展開

$$y(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

極小(極大)点では微分がゼロ

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = 0 \quad \to \quad x = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$ を繰り返すと極小点(極大点)に収束する

多変数関数の最適化に対するニュートン法

$z = f(x, y)$ の極小点(極大点)を求める

ある点 $(x, y) = (x_0, y_0)$ のまわりでテイラー展開

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

極小(極大)点では $f_x = f_y = 0$

$$f_x = f_x(x_0, y_0) + f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{xy}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$f_y = f_y(x_0, y_0) + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

行列形式で書くと

$$\nabla f(\overrightarrow{x_0}) - H(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) = 0$$

ここで $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$ (ヘッセ行列). よって、 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} - H^{-1} \nabla f(\overrightarrow{x_0})$ を繰り返すと極小点(極大点)に収束する

勾配降下法

ニュートン法ではヘッセ行列の逆行列を求める(あるいは連立一次方程式を解く)必要がある

方程式を解くかわりに、勾配の逆方向に少しずつ進む(勾配降下法)

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} - \epsilon \nabla f(\overrightarrow{x_0})$$

ϵ は小さな定数

例題) 二変数関数 $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の極小値を勾配降下法でもとめよ