

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



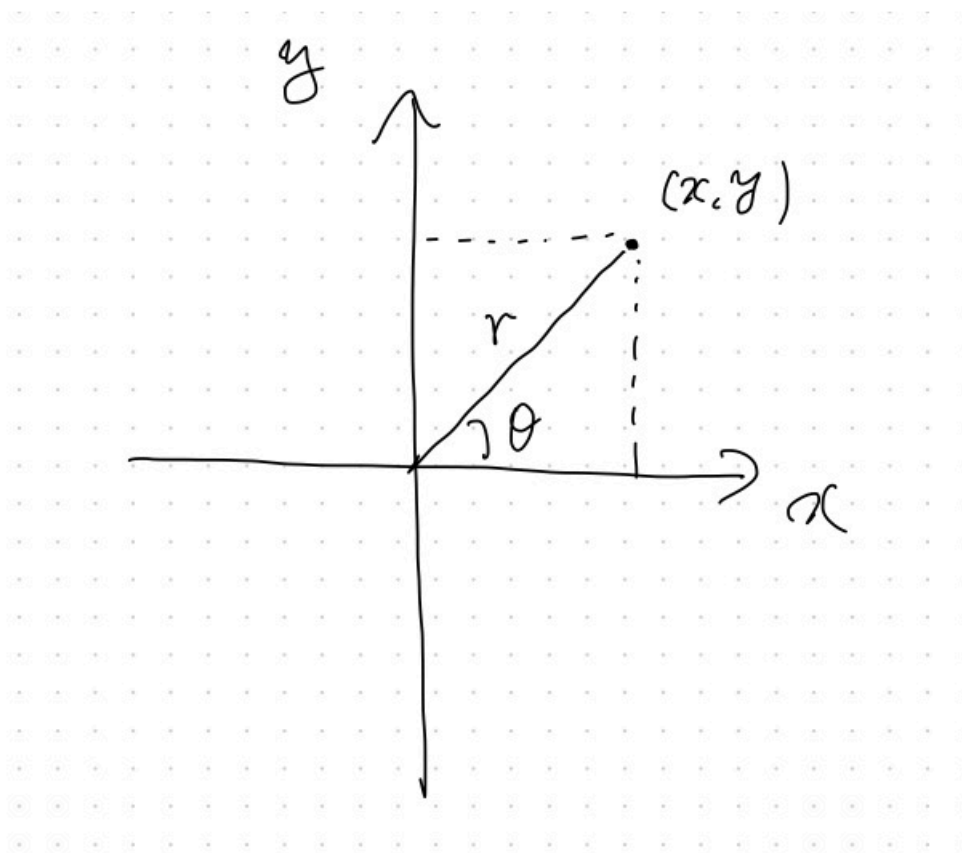
極座標

極座標

二次元空間の点の位置を原点からの距離 r と x 軸からの角度 θ で表す

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

```
imshow('polar-1.jpg')
```



極方程式

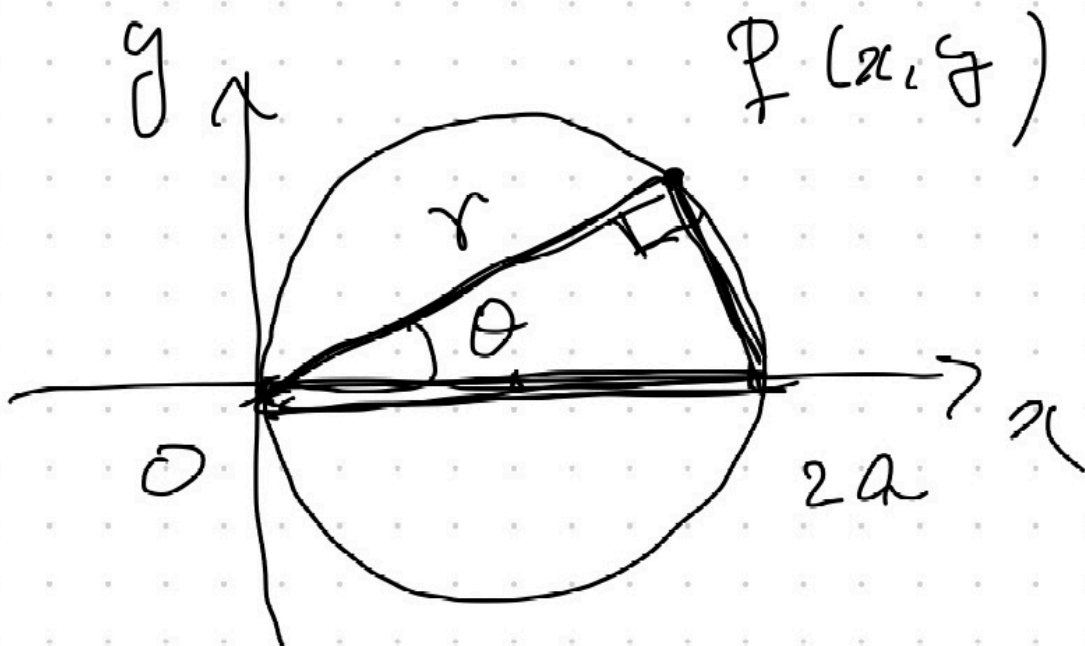
二次元の曲線の方程式 $F(x, y) = 0$ (陰関数表示) を極座標で表すと $F(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ (極方程式)

例) 中心 $(a, 0)$, 半径 a の円の方程式

直交座標 (x, y) では $(x - a)^2 + y^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$

極座標表示すると $r^2 = 2ar \cos \theta \rightarrow r = 2a \cos \theta$

```
imshow('polar-2.jpg')
```



極座標での微分

例) $z = x^2 + y^2$

$$z = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \quad \text{よ} \ddot{r} \quad \frac{\partial z}{\partial r} = 2r, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

合成関数の微分 $(m, n) = (2, 2)$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = [2x, 2y] \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = [2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta, -2r^2 \sin \theta \cos \theta + 2r^2 \sin \theta \cos \theta] = [2r, 0]$$

例題) $z = x^2 + xy + y^2$ の極座標に関する偏微分 $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ

例題) 二変数関数 $z = z(x, y)$ の極座標に関する二階偏微分 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を求めよ。その結果を用いて、

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$ が成り立つことを示せ。この等式が $z = x^2 + y^2$ と $z = x^2 + xy + y^2$ に関して成り立っていることを確認せよ