

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



合成関数の微分

例0) $(m, n) = (1, 1)$ の場合: $y(u) = u^5$, $u(x) = x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 5u^4 \times 2x = 10x(x^2 + 3)^4$$

例1) $(m, n) = (2, 1)$ の場合: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + 1$

```
syms x y t
f(x, y) = x^2 + x * y + y^2
```

$$f(x, y) = y^2 + xy + x^2$$

$$xt(t) = t^3 + 1$$

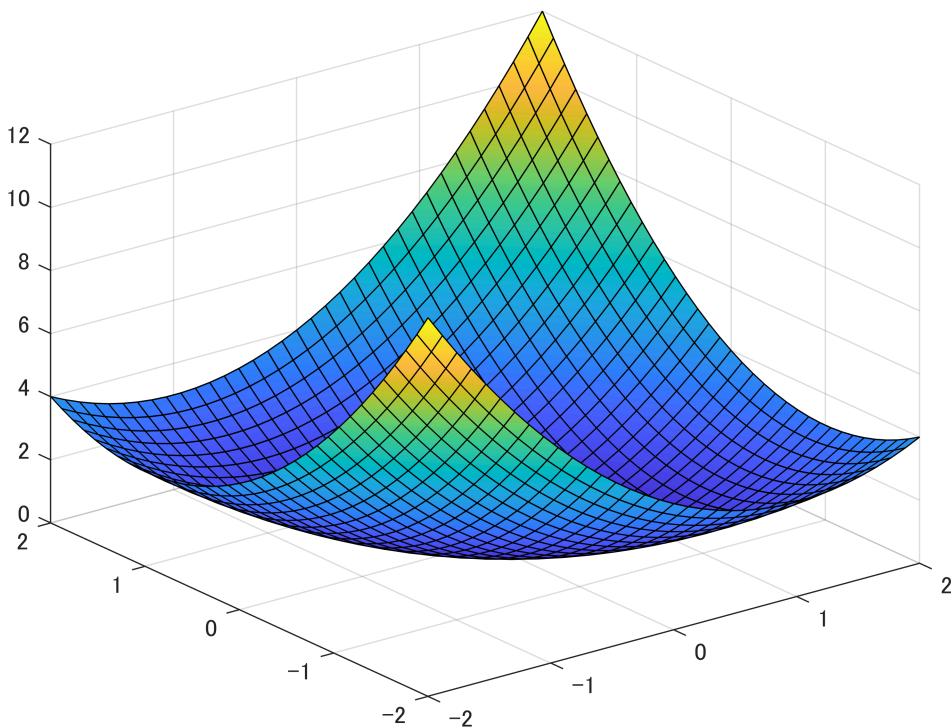
$$xt(t) = 1 + t^3$$

$$yt(t) = t^2 + 1$$

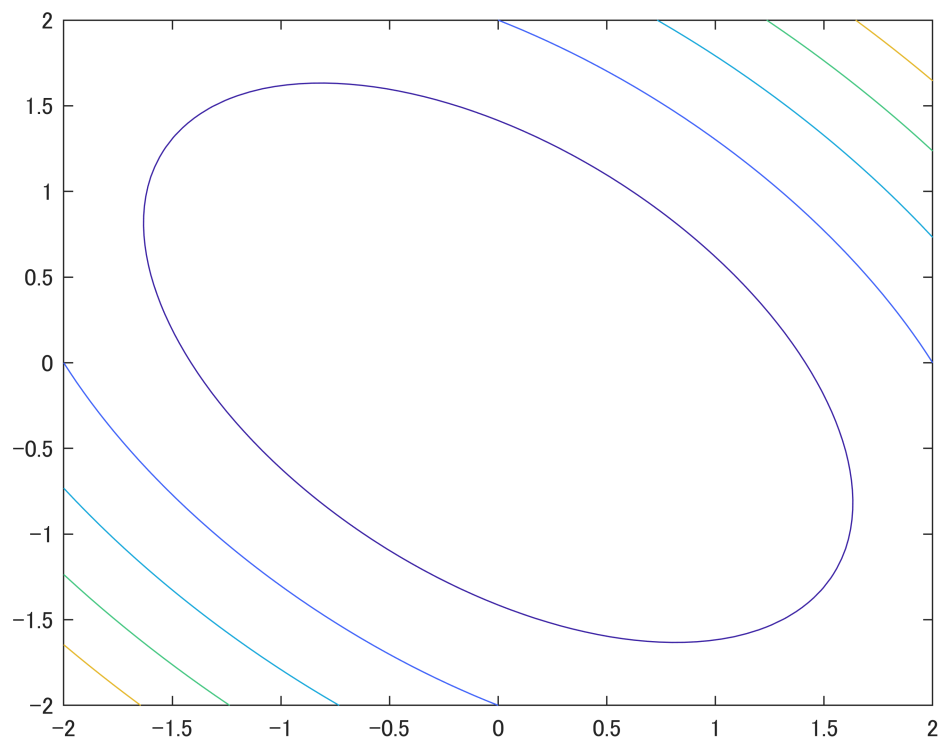
$$yt(t) = 1 + t^2$$

二変数関数 $f(x, y)$ のプロット

```
fsurf(f, [-2 2])
```

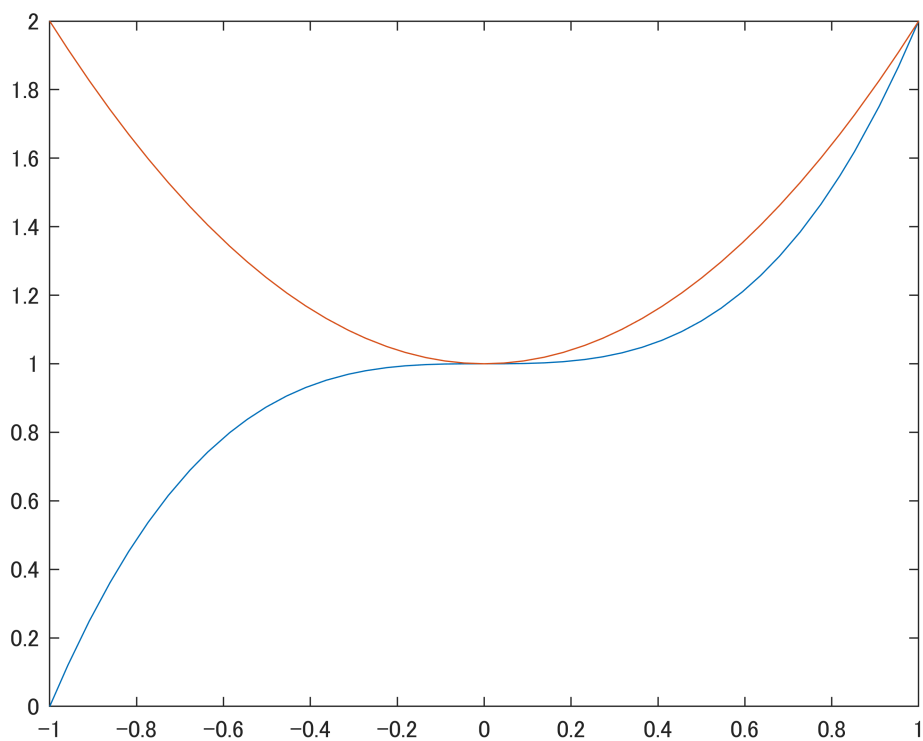


```
fcontour(f, [-2 2])
```



$x(t)$ と $y(t)$ のプロット

```
fplot([xt yt], [-1 1])
```

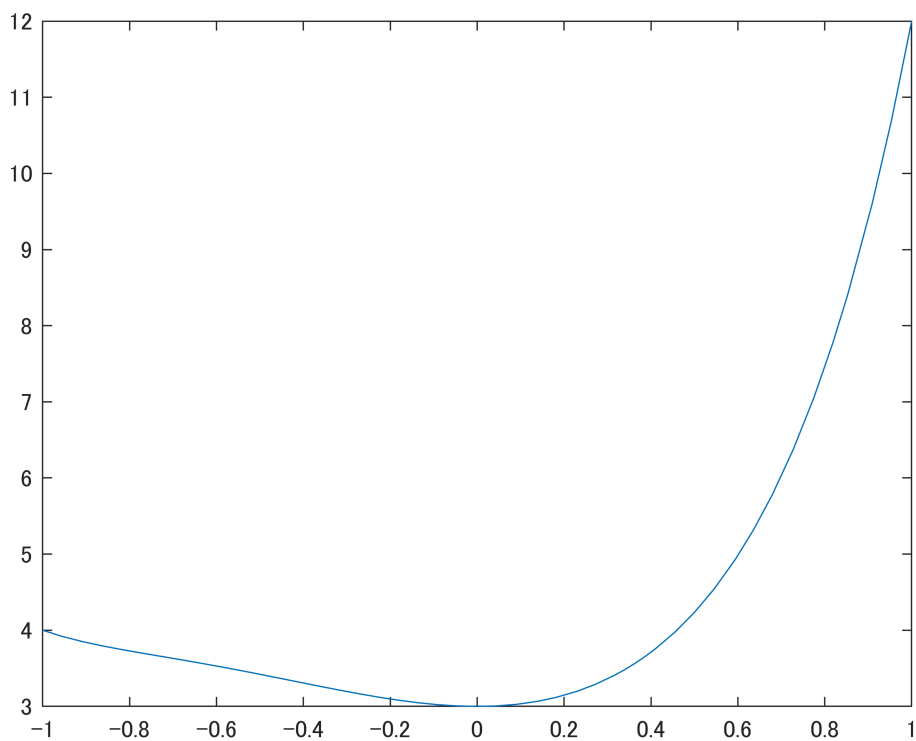


合成関数のプロット

```
ft(t) = f(xt(t), yt(t));  
expand(ft)
```

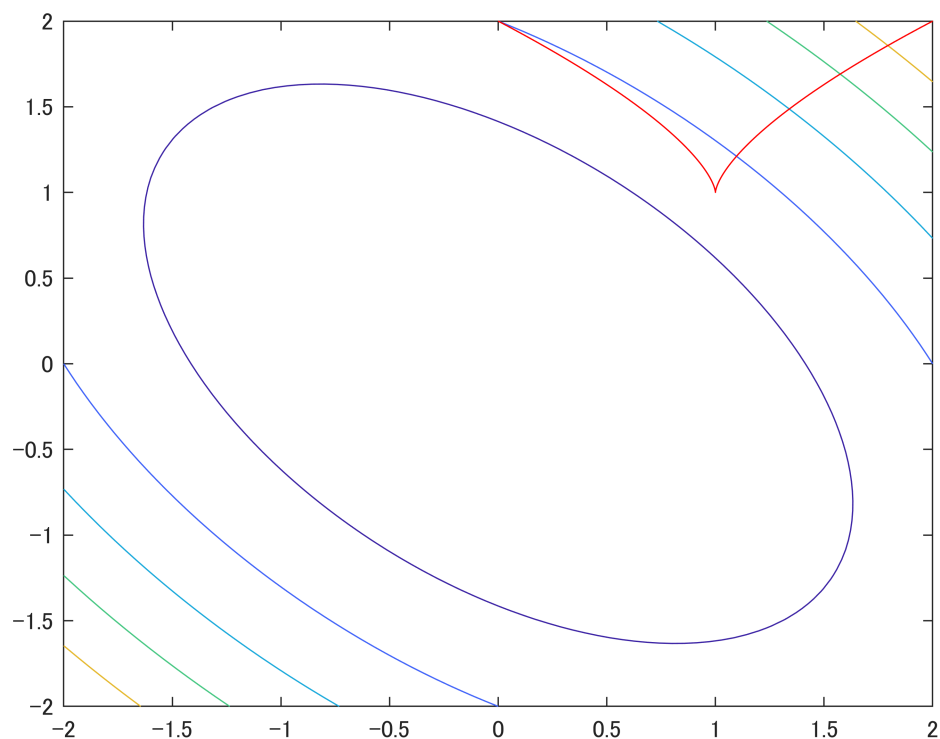
```
ans(t) = 3 + 3 t2 + 3 t3 + t4 + t5 + t6
```

```
fplot(ft, [-1 1])
```



xy 平面上で $x(t)$ と $y(t)$ はどのように移動するか? (赤線)

```
tv = linspace(-1,1);  
xtv = xt(tv);  
ytv = yt(tv);  
fcontour(f, [-2 2]); hold on  
plot(xtv, ytv, "r"); hold off  
xlim([-2 2])  
ylim([-2 2])
```



合成関数の微分

```
expand(diff(ft, t))
```

$$\text{ans}(t) = 6t + 9t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5$$

合成関数の微分の公式に従って微分を計算

```
dfdx(x, y) = diff(f,x)
```

$$\text{dfdx}(x, y) = y + 2x$$

```
dfdy(x, y) = diff(f,y)
```

$$\text{dfdy}(x, y) = 2y + x$$

```
dfdt(t) = dfdx(xt(t), yt(t)) * diff(xt, t) + dfdy(xt(t), yt(t)) * diff(yt, t)
```

$$\text{dfdt}(t) = 2t(3 + 2t^2 + t^3) + 3t^2(3 + t^2 + 2t^3)$$

```
expand(dfdt)
```

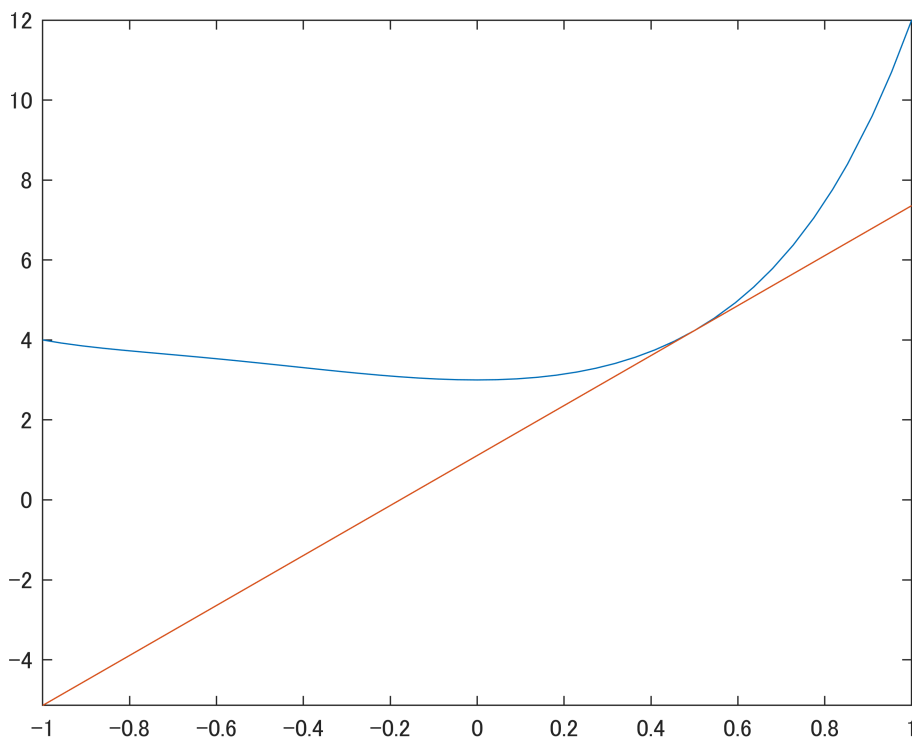
$$\text{ans}(t) = 6t + 9t^2 + 4t^3 + 5t^4 + 6t^5$$

行列による表現

$$f_x, f_y \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = [2x + y, x + 2y] \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = (2x + y)3t^2 + (x + 2y)2t = (2(t^3 + 1) + (t^2 + 1))3t^2 + ((t^3 + 1) + 2(t^2 + 1))2t = 6t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 9t^2 + 6t^2 + 4t = 6t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 15t^2 + 4t$$

$t = 0.5$ における微分係数を確認

```
fplot([ft(t) dfdt(0.5) * (t - 0.5) + ft(0.5)], [-1 1])
```



練習問題

次の合成関数の t に関する微分を計算せよ

- $f(x, y) = x^2 + xy + y^2, x = t + 1, y = t^2 + t$
- $f(x, y) = \frac{x}{y}, x = 1 - 2t, y = 1 + t^2$

例2) $(m, n) = (1, 2)$ の場合: $f(g) = \log(1 - g^2), g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$

行列による表現

$$[f_x, f_y] = [f_g][g_x, g_y] = -\frac{2g}{1-g^2}[2x, 2y] = -\frac{2(x^2 + y^2 - 2)}{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2}[2x, 2y] = \left[-\frac{4x(x^2 + y^2 - 2)}{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2}, -\frac{4y(x^2 + y^2 - 2)}{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2}\right]$$