クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

偏微分と関数の極大・極小

$F(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$

を考えよう.

ただし行列 A とベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である.

```
A=[2 1;1 2];
[V,D]=eig(A)
```

行列 A の固有値は1, 3であり, 対応する固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 1 : \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 : \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる.

```
P=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2);1/sqrt(2) 1/sqrt(2)]
```

```
P = 2×2
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
```

```
inv(P)
```

```
ans = 2×2
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
```

```
P\A*P
```

```
ans = 2×2
         0   -0.1000
   -0.3000    0.6000
```

これから変換行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る.

$${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}(PP^{-1})A(PP^{-1})\mathbf{x} = {}^t(P^{-1}\mathbf{x})P^{-1}AP(P^{-1}\mathbf{x})$$

と書き直してみよう.

ここでは ${}^t(P^{-1}) = P$ を使用した.

また

$$P^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x+y)/\sqrt{2} \\ (x+y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (-x+y)/\sqrt{2} \\ (x+y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{u}) = u^2 + 3v^2$$

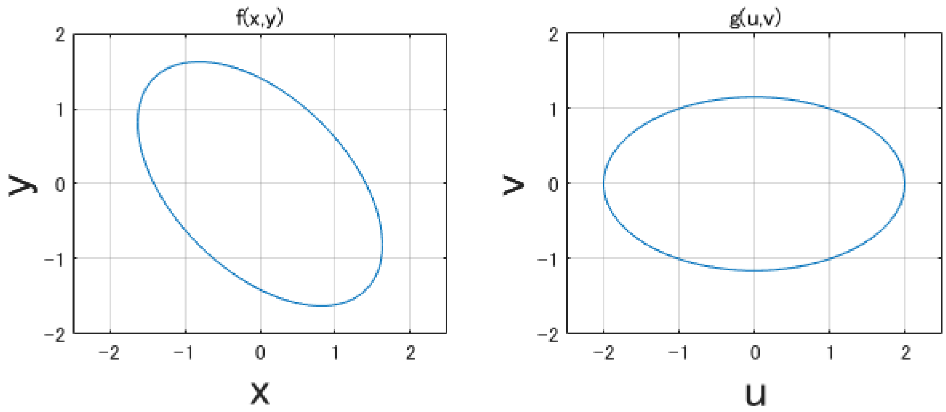
と変換される. これを主軸変換といい, また $G(\mathbf{u})$ のような形を標準形とよぶ.

$$G(\mathbf{u}) = u^2 + 3v^2 = a^2$$

と書けばこの式は, (u, v)空間で長軸の長さ短軸の長さ $2a/\sqrt{3}$ の楕円を表している. また (x, y) 空間ではこの楕円を $\pi/4$ だけ傾けたものである.

これらを (x, y) 空間および (u, v) 空間で描いてみよう.

```
clf
f= @(x,y) 2.*x.^2 + 2.*y.^2 +2.*x.*y- 4;
g= @(u,v) u.^2 + 3*v.^2 - 4;
subplot(1,2,1);fimplicit(f,[-2.5 2.5 -2 2]);daspect([1 1 1])
xlabel('x','FontSize',18);ylabel('y','FontSize',18);
title('f(x,y)','FontSize',18); grid on
subplot(1,2,2);fimplicit(g,[-2.5 2.5 -2 2]);daspect([1 1 1])
xlabel('u','FontSize',18);ylabel('v','FontSize',18);
title('g(u,v)','FontSize',18); grid on
```

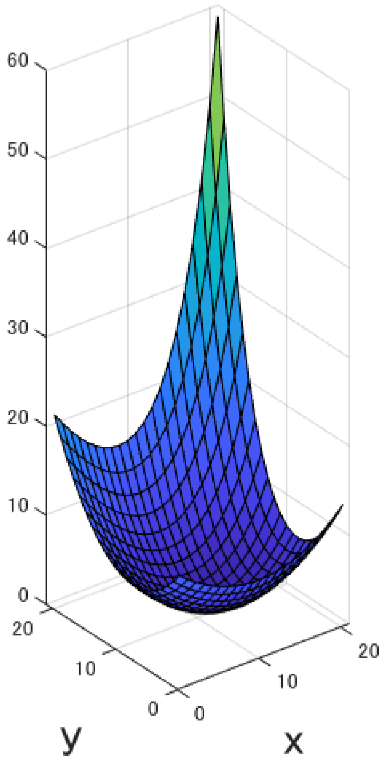


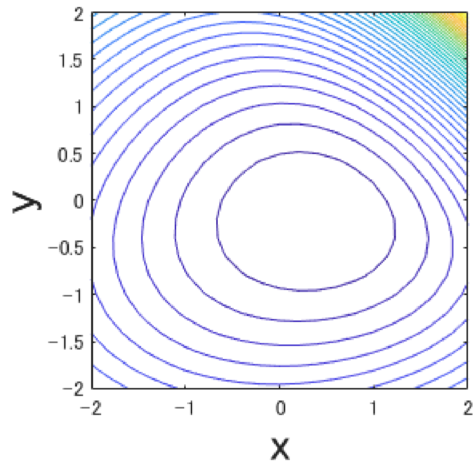
例題

$F(x,y) = x^2 - 10 * xy + 5y^2 - 2x + \exp(x+y)$ の最小値をとる点 (x,y) およびその最小値を求めよう．

Step1: まず、関数のおおよその振舞を理解する．

```
clf
[x,y]=meshgrid(-2:0.2:2);
f= x.^2-x.*y+2*y.^2-2*x+exp(x+y);
subplot(1,2,1);surf(f);
daspect([1 1 1])
xlabel('x','FontSize',18);ylabel('y','FontSize',18);
subplot(1,2,2);contour(x,y,f,40);hold on
daspect([1 1 1])
xlabel('x','FontSize',18);ylabel('y','FontSize',18);
```



Step2: 図より極小値をとる点は原点近傍にあることが分かる．その最小値をとる点を見出す．

```
syms x y
f= x.^2-x.*y+2*y.^2-2*x+exp(x+y);
dfx=diff(f,x)
```

dfx = $2\,x - y + \mathrm{e}^{y+x} - 2$

```
dfy=diff(f,y)
```

dfy = $4\,y - x + \mathrm{e}^{y+x}$

この連立方程式を解析的に解くことはできない．

しかし数値的に解くことは難しくないし，MATLABにはそのためのルーチンがある．

```
%[solx,soly]=solve([dfx==0,dfy==0],[x,y])
[solx,soly]=vpasolve([dfx==0,dfy==0],[x,y])
```

solx = $0.33044949825227049518168533413148$

soly = $-0.20173030104863770289098879952111$

```
solf=solx^2-solx*soly+2*soly^2-2*solx+exp(solx+soly)
```

solf = $0.73372048232360743865612184381254$

```
x0=double(solx)
```

```
x0 = 0.3304
```

```
y0=double(soly)
```

```
y0 = -0.2017
```

```
f0=double(solf)
```

```
f0 = 0.7337
```

あるいは，もっと簡単に，こういう関数もある．

```
f=@(x) x(1)^2-x(1)*x(2)+2*x(2)^2-2*x(1)+exp(x(1)+x(2));
x0=[0,0];
fminunc(f,x0)
```

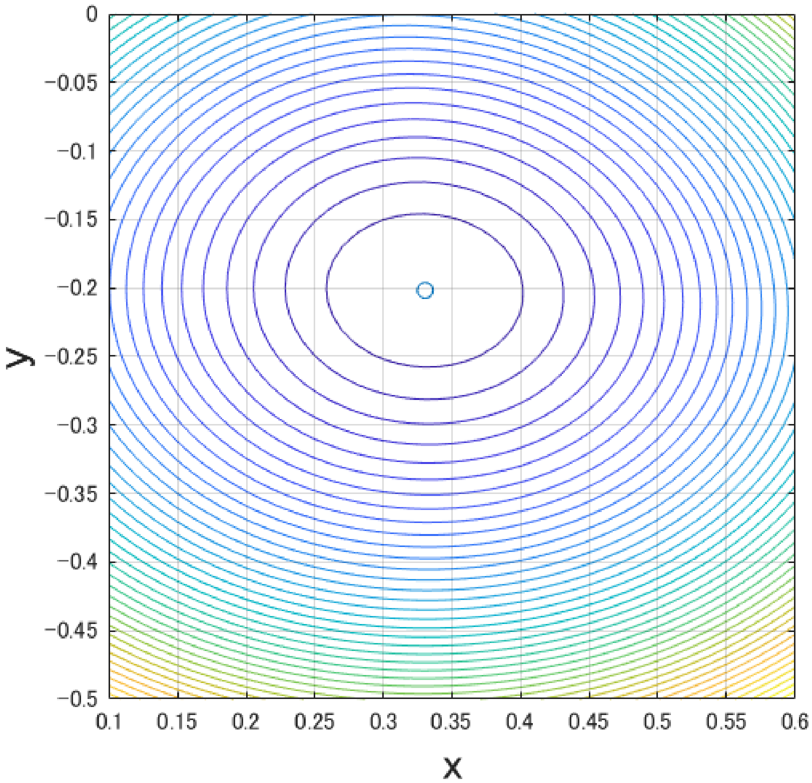
```
局所的最小値が見つかりました。

勾配のサイズが
最適性の許容誤差値未満であるため、最適化は完了しました。

<停止条件の詳細>
ans = 1×2
    0.3304   -0.2017
```

Step3: 最小点の近傍での振舞を理解するため，等高線図を描いてみる．

```
clf
X=[0.1:0.01:0.6];
Y=[-0.5:0.01:0];
[x,y]=meshgrid(X,Y);
f= x.^2-x.*y+2*y.^2-2*x+exp(x+y);
contour(x,y,f,40);hold on
daspect([1 1 1])
plot(solx,soly,'-o');grid on
xlabel('x','FontSize',18);ylabel('y','FontSize',18);
```

これを例でやったように，最低値をとる点の近傍でテーラー展開しよう．

まず $xp = x - x_0, yp = y - y_0$ として，極小値をとる点 (x_0, y_0) に原点を移動する．元の関数も，最小値が0となる様にする．

```
syms xp yp
h=expand((xp+x0).^2-(xp+x0).*(yp+y0)+2*(yp+y0).^2-2*(xp+x0)+exp((xp+x0)+(yp+y0))-f0)
```

h =

$$\left(\mathrm{xp}^2 - \frac{3634050034527931\ \mathrm{yp}}{4503599627370496} - \mathrm{xp}\ \mathrm{yp} - \frac{32394746984436037\ \mathrm{xp}}{18014398509481984} + 2\ \mathrm{yp}^2 + \mathrm{e}^{-\frac{3634050034527931}{18014398509481984}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{xp}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{yp}} - \frac{10}{16}\right.$$

```
taylor(h,[xp,yp])
```

ans =

$\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_1\end{pmatrix}$

where

$$\sigma_1 = \mathrm{e}^{-\frac{3634050034527931}{18014398509481984}} - \frac{10584663520315771064038635520871}{162259276829213363391578010288128} + \left(\mathrm{e}^{-\frac{3634050034527931}{18014398509481984}} - \frac{3634050034527}{4503599627370}\right.$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3634050034527931}{18014398509481984}}}{2}$$

```
sympref('PolynomialDisplayStyle','ascend');% テーラー展開を昇順で書く.
```

各係数を倍精度で表現.

```
double(exp(sym('289849864280855/2251799813685248')) - sym('92274473832877817925878188440457/811
```

```
ans = 1.2844e-17
```

```
double(exp(sym('289849864280855/2251799813685248')) - sym('20489049086886495/18014398509481984'
```

```
ans = -1.5234e-17
```

```
a22=double(exp(sym('289849864280855/2251799813685248'))/2+2)%yp^2の係数
```

```
a22 = 2.5687
```

```
a12=double(exp(sym('289849864280855/2251799813685248')) - 1)%xp*yp の係数
```

```
a12 = 0.1374
```

```
a21=a12
```

```
a21 = 0.1374
```

```
a11=double(exp(sym('289849864280855/2251799813685248'))/2 + 1)%xp^2
```

```
a11 = 1.5687
```

```
A=[a11 a12;a21 a22]
```

```
A = 2×2
    1.5687    0.1374
    0.1374    2.5687
```

```
[P D]=eig(A)
```

```
P = 2×2
   -0.9910    0.1337
    0.1337    0.9910
D = 2×2
    1.5502         0
         0    2.5872
```

ここから新しい座標 (u, v) に移る.

```
syms u v
iP=P\eye(2)
```

```
iP = 2×2
   -0.9910    0.1337
    0.1337    0.9910
```

```
u=iP(1,1)*xp+iP(1,2)*yp
```

u =

$$\frac{4815669145073457\ yp}{36028797018963968} - \frac{8926377853442621\ xp}{9007199254740992}$$

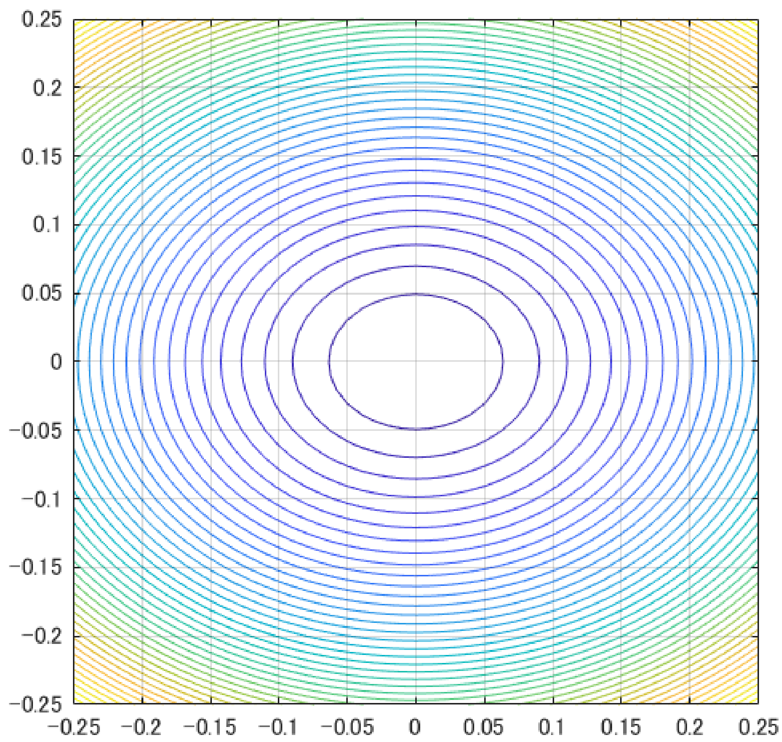
```
v=iP(2,1)*xp+iP(2,2)*yp
```

v =

$$\frac{2231594463360655\ yp}{2251799813685248} + \frac{4815669145073457\ xp}{36028797018963968}$$

```
clf
X=[-0.25:0.01:0.25];
Y=[-0.25:0.01:0.25];
[u1,v1]=meshgrid(X,Y);

Fuv=D(1,1)*u1.^2+D(2,2)*v1.^2;
contour(u1,v1,Fuv,40);grid on;daspect([1 1 1])
```



Step4: これでおおよそ知るべきことは得た.

課題

以下の関数の極値を与える点とそのときの値を求め，また極小を与える点近傍の様子を調べよ．ただし極値を与える点は解析的に求めよ．

1. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x$
3. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2y$
4. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + x - y$