

クレジット:

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



多変数関数のテーラー展開と等高線図

例1 $f = \sin(x) + \cos(y) + \exp(z)$ のテーラー展開

```
syms x y z
f = sin(x) + cos(y) + exp(z);
dfx=diff(f,x)
```

dfx = cos(x)

```
txf=taylor(f,x)
```

txf =

$$x + \cos(y) + e^z - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
T = taylor(f, [x, y, z])
```

T =

$$2 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

```
U = taylor(f, [x,y,z], [1,2,1])
```

U =

$$\cos(2) + e + \sin(1) - \frac{\sin(1)(-1+x)^2}{2} + \frac{\sin(1)(-1+x)^4}{24} + \frac{\sin(2)(-2+y)^3}{6} - \frac{\sin(2)(-2+y)^5}{120} + \cos(1)$$

例2 $(1+\sin(x))*(1+\cos(y))*\exp(z)$ の (1, 2, 1) の周りでのテーラー展開

```
syms x y z
f = (1+sin(x))*(1+cos(y))*exp(z);
T = taylor(f, [x, y, z])
```

T =

$$2 + 2z + z^2 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} + \frac{z^5}{60} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^2z}{2} - \frac{y^2z^2}{4} - \frac{y^2z^3}{12} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^4z}{24} + 2x + 2xz + xz^2 + \frac{xz^3}{3} + \frac{xz^4}{12} - \frac{xy^2}{2} - \dots$$

```
U = taylor(f, [x,y,z], [1,2,1])
```

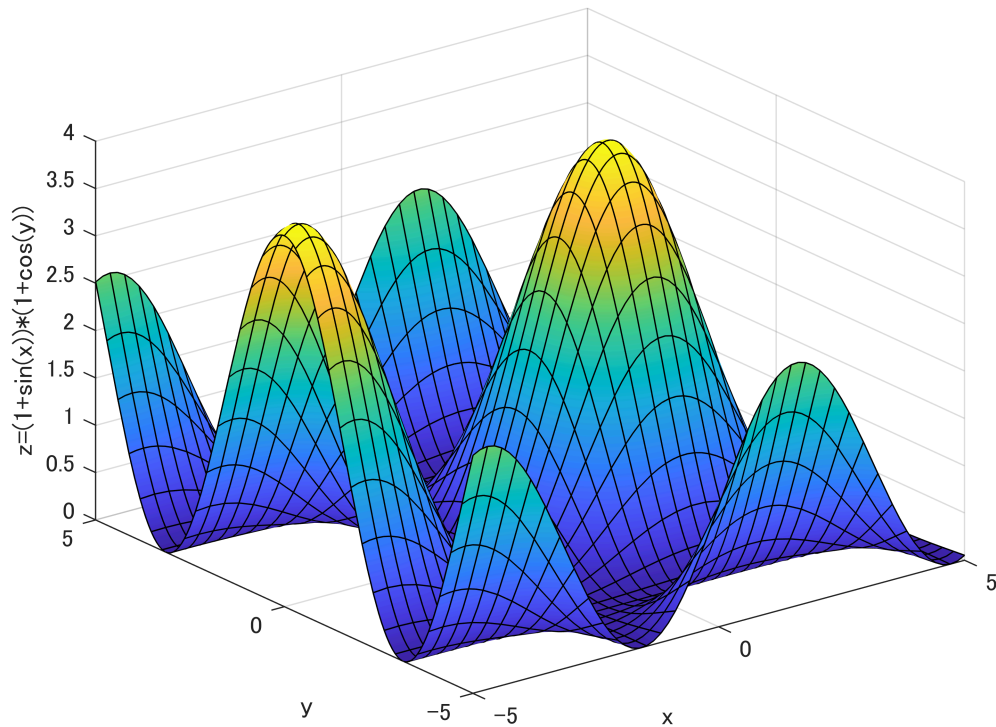
U =

$$e(\cos(2)+1)(\sin(1)+1) - \frac{\cos(1)e(\cos(2)+1)(-1+x)^3}{6} + \frac{\cos(1)e(\cos(2)+1)(-1+x)^5}{120} - \frac{e\sin(1)}{2}$$

例3 $z(x,y)=(1+\sin(x))*(1+\cos(y))$ の2次元プロット

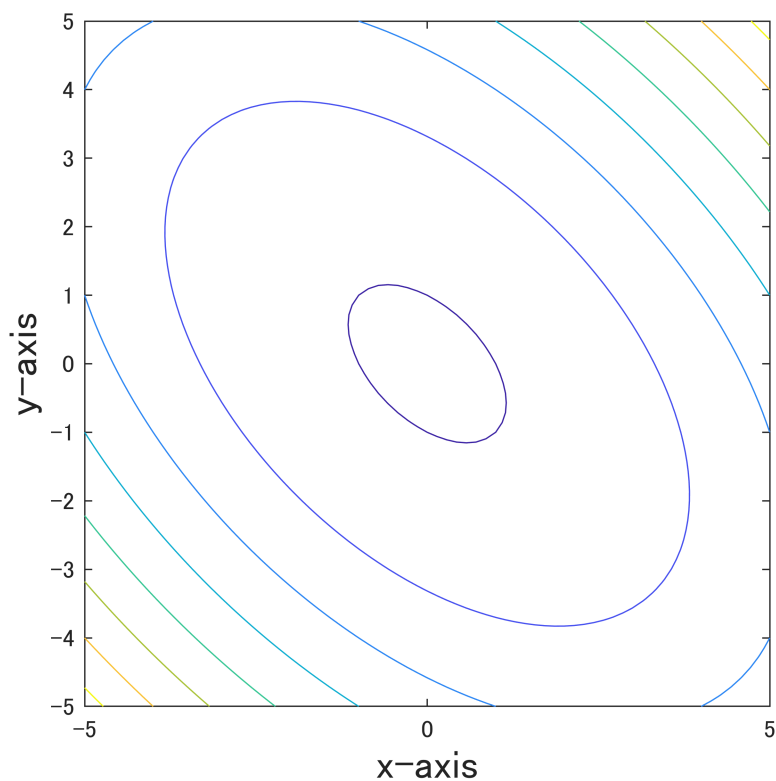
```
clf
syms x y z
z(x,y)=(1+sin(x))*(1+cos(y));
fsurf(x,y,z);
xlabel('x');
ylabel('y');
```

```
zlabel('z=(1+sin(x))*(1+cos(y))')
```



例4 $f(x,y)=x^2+x*y+y^2-1$ の等高線図

```
clf  
syms x y  
f=x^2+x*y+y^2-1;  
fcontour(f)  
xlabel('x-axis','FontSize',15); ylabel('y-axis','FontSize',15);  
daspect([1 1 1])
```

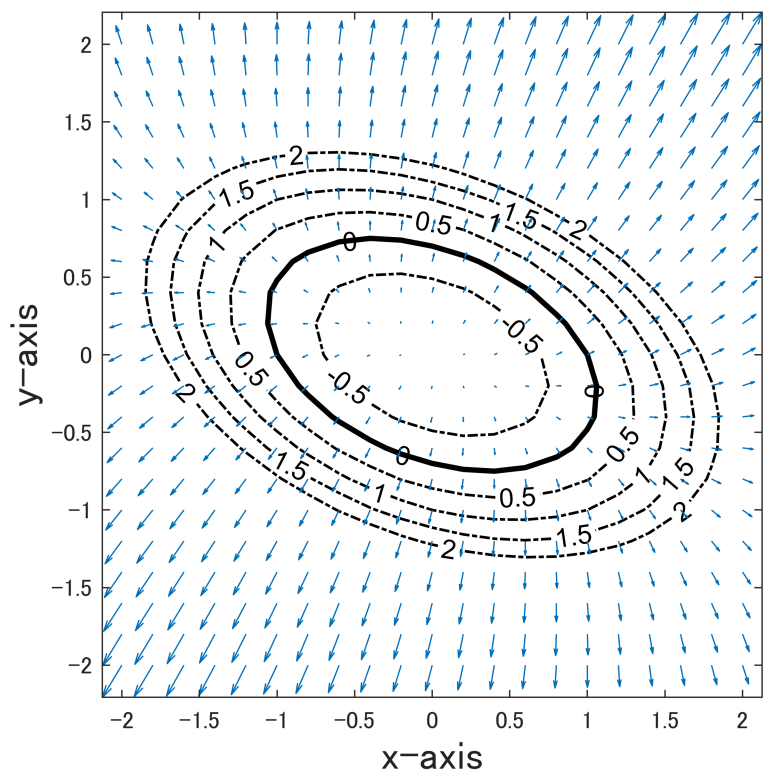


$f(x,y,z)=x^2+x*y+y^2-1$ の等高線図に勾配を記入

```

clf
[x,y]=meshgrid(-2:0.2:2);
f=x.^2+x.*y+2*y.^2-1;
contour(x,y,f,10,'-k','LevelList',(0),'LineWidth',2); hold on %f=0の等高線を太い実線で描く
[C, h]=contour(x,y,f,10,'-.k','LevelList',[-0.5,0,0.5,1,1.5,2],'LineWidth',1); %-0.5, 0, 0.5, 1,
clabel(C,h);hold on %等高線の値を記入
xlabel('x-axis','FontSize',15); ylabel('y-axis','FontSize',15);
[U, V] = gradient(f,0.2,0.2);hold on%勾配を計算.
quiver(x,y,U,V);hold off% 勾配を矢印で描く.
daspect([1 1 1])

```



課題

様々な多変数関数を考えてそのグラフ、等高線図を書き、それらの $(0, 0)$ 近傍での振舞を観察せよ. .

(1) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, (2) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, (3) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$