「平均値の定理」の応用

平均値の定理：

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) で微分可能であるならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる点 c が必ず区間 (a,b) の中にある.

1-1. ニュートン法

これを $b\to x,\quad a\to x_0\quad c\simeq x_0$ として書き直せば

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

これは微分の定義式，テーラー展開の式でもある.

これを $f(x)=0$ の近似解法として見ることもできる．近似解 x_0 から出発して次の近似解を得る式として

$x=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$

を得ることができる．（ニュートン法）--- 江戸時代の和算の祖 関孝和 による発見.

例　ニュートン法

$f(x)=x^3+7x^2-1=0$ の $x=1.0$ 近傍の解を求める.

注意）講義時間中は、プログラム**15**行目を

x=x0-f(x0)/df(x0)

としたため、可変精度で計算され必要以上の計算時間がかかった。

それを避けるためここでは倍精度に変更した.

```
clf
ite=zeros(10,3);
syms f(x) g(y)
f(x)=x^3+7*x^2-1
```

f(x) = $-1+7\,x^2+x^3$

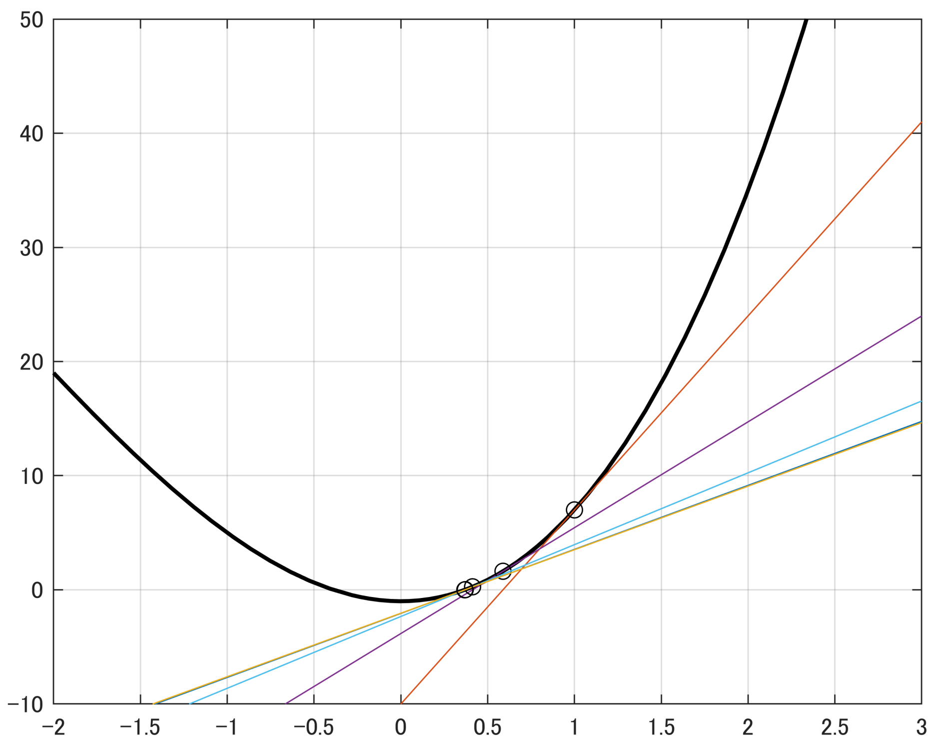
```
df=diff(f,x)
```

df(x) = $14\,x+3\,x^2$

```
fplot(f,'k','LineWidth',1.5);hold on;grid on
xlim([-2,3]);ylim([-10,50])

Dev=1;
x0=1.0;
```

```
    ite(1,1)=1;
    ite(1,2)=x0;
    ite(1,3)=Dev;
for n=1:20
  if Dev>1.0*10^(-5)
    coe=double(f(x0)/df(x0));
    x=x0-coe;
    Dev=abs(x-x0);
    h(y)=double(f(x0))+double(df(x0)).*(y-x0);
    fplot(h);hold on
    fplot(x0,f(x0),'-.ok');hold on
    x0=x;
    n0=n+1;
    ite(n0,1)=n0;
    ite(n0,2)=x;
    ite(n0,3)=Dev;
    %ite(n0,:)
  else
  end
end
```




```
format long
ite(1:n0,:)
```

```
ans = 6×3
   1.000000000000000   1.000000000000000   1.000000000000000
   2.000000000000000   0.588235294117647   0.411764705882353
   3.000000000000000   0.412928007023705   0.175307287093942
   4.000000000000000   0.370977420136931   0.041950586886774
   5.000000000000000   0.368404501934404   0.002572918202527
```

```
    6.000000000000000    0.368394853868558    0.000009648065846
```

```
format
```

課題

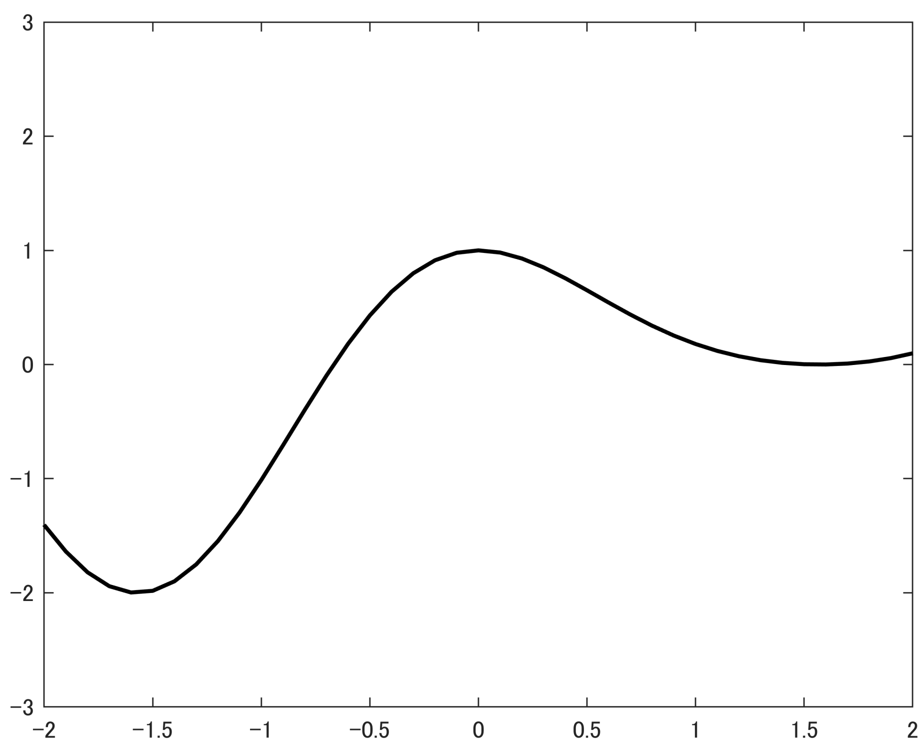
1. 例と同じ問題で、出発値として $x_0 = -1$ を使用せよ.

2. sin(x)^3+2*cos(x)^2-1=0 の $x = -0.5$ 近傍の解を数値的に求よ.

```
clf
x=-5:0.1:5;
f=sin(x).^3+2*cos(x).^2-1
```

```
f = 1×101
    0.0427    0.0178    0.0039    0.0001    0.0063    0.0230    0.0506    0.0903 ···
```

```
plot(x,f,'k','LineWidth',1.5);hold on
xlim([-2,2]);ylim([-3,3])
```




```
clf
ite=zeros(100,3);
syms g(x) dg(x)
g(x)=sin(x)^3+2*cos(x)^2-1
```

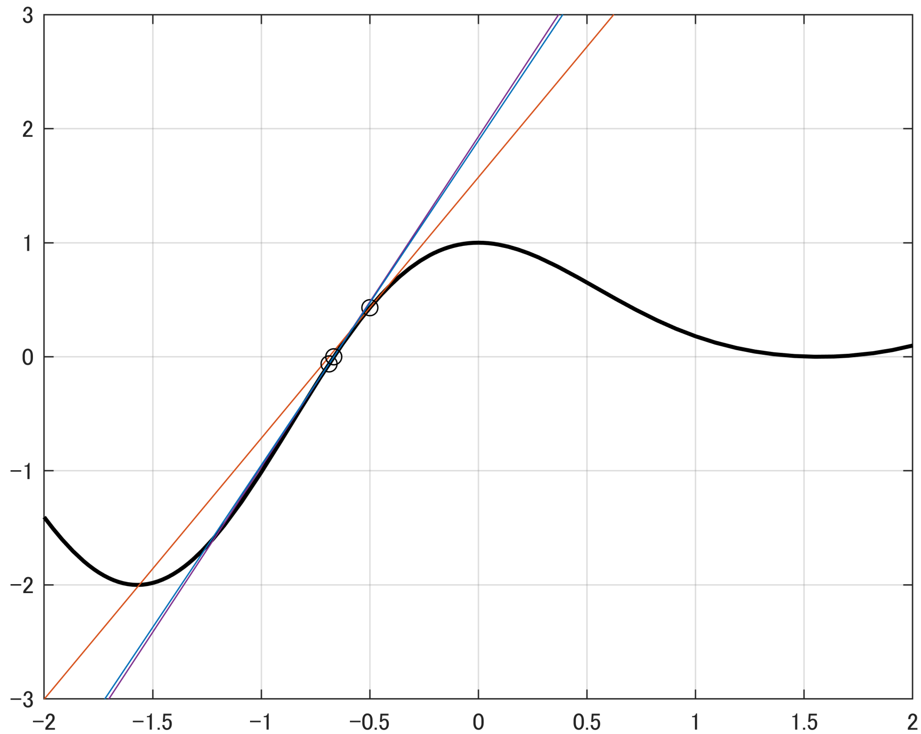
g(x) = $2\cos(x)^2+\sin(x)^3-1$

```
dg=diff(g,x)
```

dg(x) = $3\cos(x)\sin(x)^2-4\cos(x)\sin(x)$

```
fplot(g,'k','LineWidth',1.5);hold on;grid on
xlim([-2,2]);ylim([-3,3])

Dev=1;
x0=-0.5;
    ite(1,1)=1;
    ite(1,2)=x0;
    ite(1,3)=Dev;
for n=1:20
    coe=double(g(x0)/dg(x0));
  if Dev>1.0*10^(-5)
    x=x0-coe;
    Dev=abs(x-x0);
    h(y)=double(g(x0))+double(dg(x0)).*(y-x0);
    fplot(h);hold on
    fplot(x0,g(x0),'-.ok');hold on
    x0=x;
    n0=n+1;
    ite(n0,1)=n0;
    ite(n0,2)=x;
    ite(n0,3)=Dev;
    %ite(n0,:)
  else
  end
end
```




```
format long
ite(1:n0,:)
```

```
ans = 5×3
   1.000000000000000  -0.500000000000000   1.000000000000000
   2.000000000000000  -0.687977541168478   0.187977541168478
   3.000000000000000  -0.666432223852012   0.021545317316466
   4.000000000000000  -0.666239448996888   0.000192774855124
   5.000000000000000  -0.666239432492515   0.000000016504372
```

```
format
```

1-2. ロピタルの定理

平均値の定理よりこの定理が導かれる.

$f(x), g(x)$ は $x = a$ の近傍で連続，微分可能かつ $g'(x) \neq 0, f(a) = g(a) = 0$ であるとき

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

である.

例

$\dfrac{x + \sin(x)}{x}$ の $x = 0$ での値をもとめよ.

```
clf
```

```
syms f(x) g(x) h(x)
f(x)=x+sin(x)
```

f(x) = $x+\sin(x)$

```
g(x)=x
```

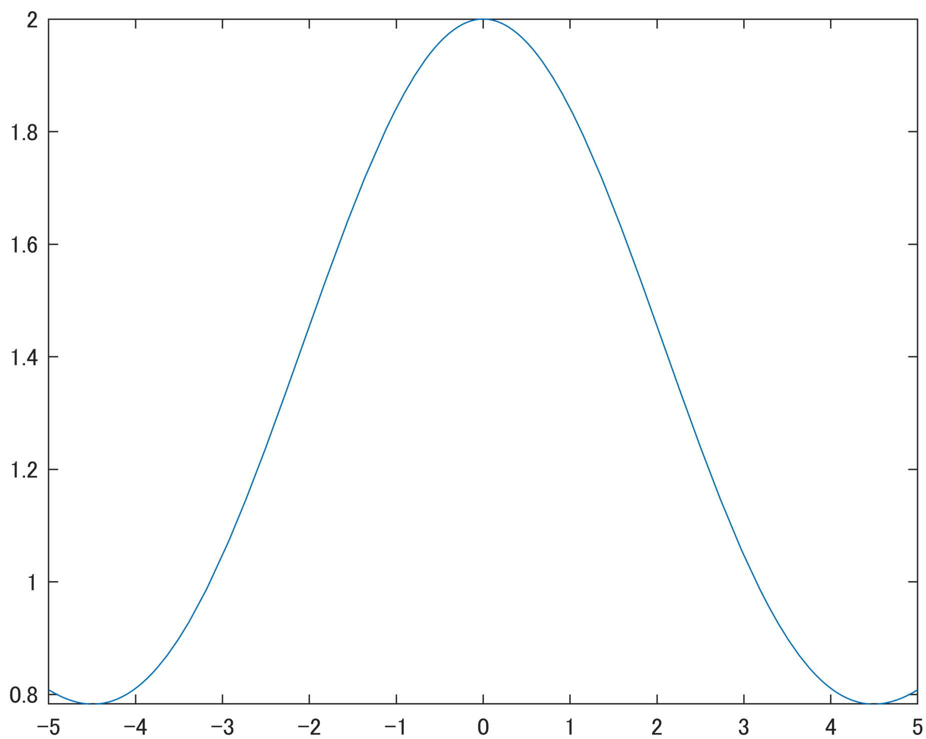
g(x) = x

```
h(x)=f(x)/g(x)
```

h(x) =

$$\frac{x+\sin(x)}{x}$$

```
fplot(h)
```



これらは何をやっていることになるのか？

```
f_Ex=taylor(f)
```

f_Ex(x) =

$$2\,x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

```
g_Ex=taylor(g)
```

g_Ex(x) = x

```
hp=expand(f_Ex/g_Ex)
```

hp(x) =

$$2-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}$$

```
hp(0)
```

ans = 2

例題

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

課題

ニュートン法を，2変数関数 $f(x,y)$ に拡張し，簡単な例題で確認せよ．