クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

ライセンス:
利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

一変数関数の微分

$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

$g(x) = 2e^x \quad g'(x) = 2e^x \quad g''(x) = 2e^x$

公式

$$(kf(x))' = k(f(x))'$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

合成関数の微分

$u = u(x)$

$y = y(u)$

$\rightarrow \quad y = y(u(x))$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

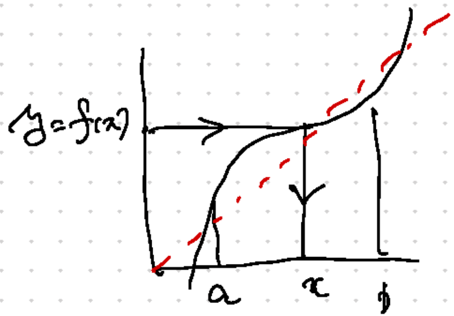
$$\begin{cases} u = x^2+1 \\ y = u^3 \end{cases} \longrightarrow \quad y = (x^2+1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

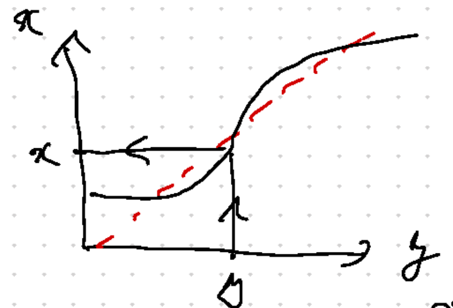
$y = \frac{1}{u}$ $\quad u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{u^2}g'(x) = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

逆関数



$y = f(x)$ $\longrightarrow$



$x = f^{-1}(y)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

例) $y = \sqrt[3]{x}$

$$\to \quad y^3 = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

パラメータ表示

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2+1 \end{cases} \quad \to \quad y = (x-1)^2 + 1$$

一般に $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

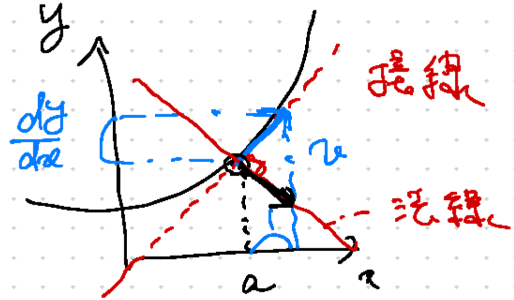
例

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t = 2(x-1)$$

$$y = (x-1)^2 + 1 \longrightarrow 2(x-1)$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

接線の方程式



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(a) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix} + t\vec{v}$$

$$= \begin{bmatrix} a + t \\ f(a) + t f'(a) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$(x-a) - \frac{1}{f'(a)}(y - f(a)) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{f'(a)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0}$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析II 2020
藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

法線

$$\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ f(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - a \\ y - f(a) \end{bmatrix} = 0$$

$$(x-a) + f'(a)\left(y - f(a)\right) = 0$$

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ f'(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{f(a)} \end{bmatrix} = 0$$

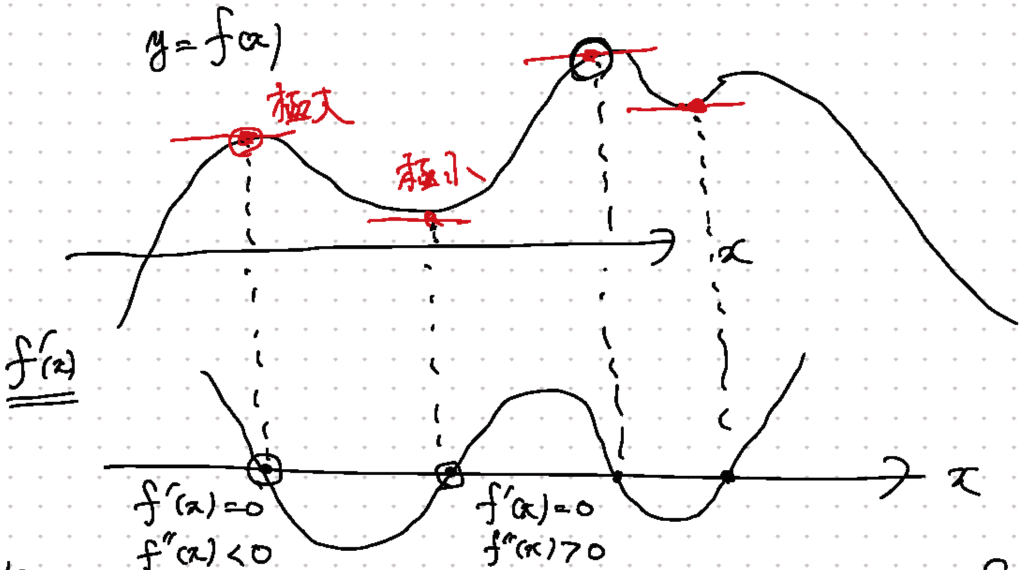
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

法線ベクトル

関数の増減

$f'(x) > 0$ ならば その付近で $f(x)$ は増加
$f'(x) < 0$ 〃 〃 減少

極値



最適化

最大値・最小値の必要条件 $f'(x) = 0$

最適化の1階の条件

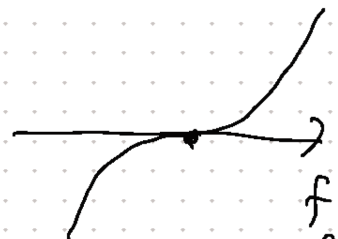
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

$$\begin{cases} f'(x)=0 & f''(x)<0 \quad \cdots \text{極大} \\ f'(x)=0 & f''(x)>0 \quad \cdots \text{極小} \end{cases}$$

◎ 極大(小)値はかならずしも最大(小)値ではない

◎ $f'(x)=0$ がかならずしも極大(小)を意味しない

$f(x)=x^3$



$f'(x)=0$

$f''(x)=0$

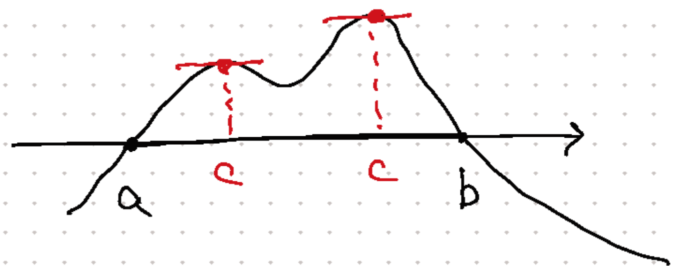
ロルの定理

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とする

このとき $f(a)=f(b)=0$ $\quad f(a)=f(b)$

ならば $f'(c)=0$ $\quad a<c<b$

を満たす c が存在する



c は 1 つとは限らない

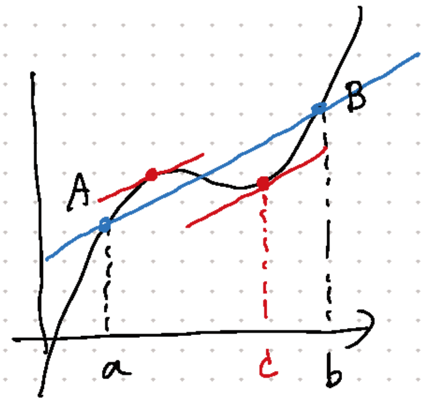
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

平均値の定理

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続　(a,b) で微分可能

このとき $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する



ABを結ぶ直線

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$$F(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

を定義。$F(x)$ も連続かつ微分可能

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

$$F(a) = F(b) = 0$$

ロルの定理より $F'(c) = 0$ となる c が存在

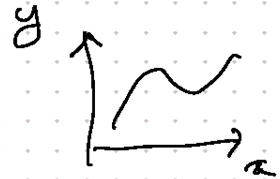
一方 $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるので

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad a < c < b$$

11:21 〜

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

二変数関数



- 一変数関数 $y = f(x)$
- 二変数関数 $z = f(x, y)$

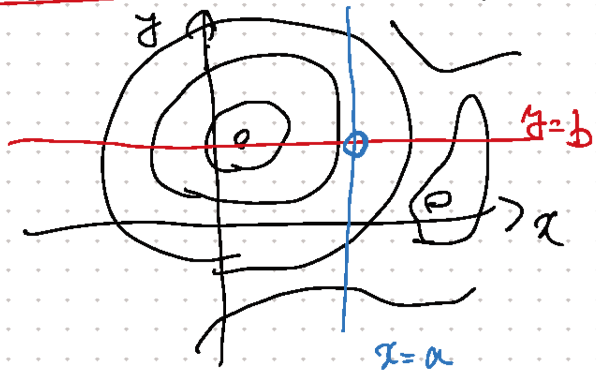
  独立変数が2つ

  $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$

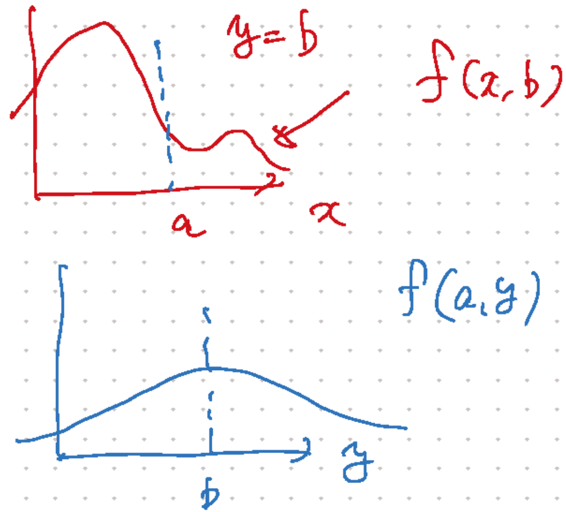
- 多変数関数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$

 CC BY-NC-ND

二変数関数の微分



考えるべき方向が２つある



Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

偏微分

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$: yを定数と考えて xで微分

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta, y) - f(x, y)}{\Delta}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$: x 〃 y 〃

例) $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

高階偏微分も同様に定義

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = 2$$

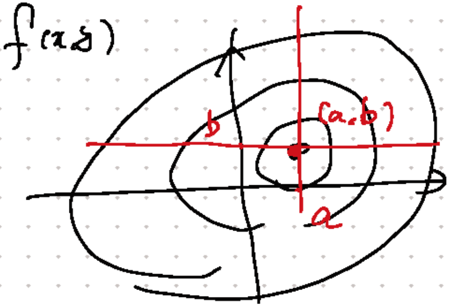
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = 6y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y^2) = 1$$

$$= \text{''}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1$$

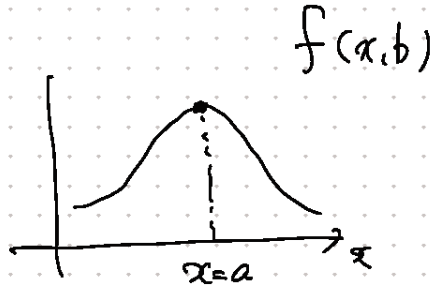
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析II 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

二変数関数の極大・極小

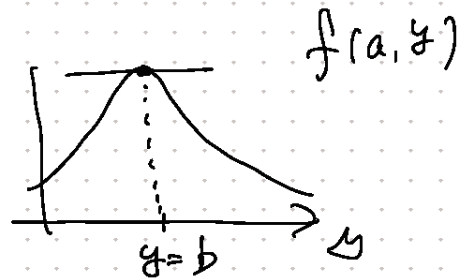


断面

$y=b$



$x=a$



極大・極小の必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

実際に極大・極小かどうかは、二階微分を調べる必要あり

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

二変数関数のテイラー展開

・一変数の場合

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}} (x-a)^n$$

・二変数の場合　$(x, y) = (a, b)$ のまわりでのテイラー展開

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(n,m)}(a, b)}{n!\, m!} (x-a)^n (y-b)^m$$

$$f^{(n,m)}(a, b) = \left. \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} \right|_{a,b}$$

二次まで

$$f(x, y) = f(a, b) + \underline{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a)} + \underline{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{a,b} (x-a)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{a,b} (x-a)(y-b)}$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{a,b}(y-b)^2 \quad + \cdots$$

極大・極小点では $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

H

行列形式

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{2}\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} x-a, & y-b\end{bmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{bmatrix}}\times\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x-a\\ y-b\end{bmatrix}}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

H: ヘッセ行列 $\qquad \begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-a\\ y-b\end{bmatrix}$

$$\boxed{(\text{第二項})}=\frac{1}{2}[X,Y]\,\underline{\underline{H}}\begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}$$

二次形式

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

ヘッセ行列 H を対角化 $H = UDU^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を定義すると

$\boxed{\text{第二項}} = \frac{1}{2} u^t D u = \underline{\frac{1}{2}(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2)}$

$\det H > 0 \begin{cases} \lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \longrightarrow u = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ は 極小} \\ \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \longrightarrow \qquad \text{〃} \qquad \text{極大} \end{cases}$

$\det H < 0 \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \qquad \longrightarrow$ 鞍点

saddle point

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

例 1 $\quad f(x,y) = \underline{\underline{x^2+y^2}}$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ヘッセ行列. $\begin{cases} f_{xx} = 2 \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy} = 2 \end{cases} \qquad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

例 2 $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x$

$f_y = -2y$

$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 鞍点

 CC BY-NC-ND

例 3 $\quad f(x,y) = 2xy$

$$f_x = 2y$$
$$f_y = 2x$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{xx} = 0$$
$$f_{yy} = 0$$
$$f_{xy} = 2$$
$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_H(\lambda) = \det(\lambda E - H) = \lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2$$

$$\lambda_+ \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_- \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫　CC BY-NC-ND

$D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を用いて $H=UDU^{-1}$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=U^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=U\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} u+v \\ u-v \end{bmatrix}$$

$2xy = u^2-v^2$ 鞍点

一般次元 $f(x_1, x_2 \dots x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

ヘッセ行列 $n\times n$ $H_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (対称行列)

全ての固有値が 正 → 極小

Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析Ⅱ 2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫 CC BY-NC-ND

負 → 極大

正と負が混在 → 極大でも極小でもない

 CC BY-NC-ND