クレジット:
Mathematics and Informatics Center 文科系のための線形代数・解析II
2020 藤堂 眞治・松尾 泰・藤原 毅夫

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

成分の総てが正　($a_{ij} > 0$)　である行列および関連した行列

ここでは特殊な形をした行列，しかし応用の観点から有用な行列を考える．

行列 A の成分が総て正 $a_{ij} > 0$ であるとすると，最大の固有値 $\lambda_{\max}$ は正の実数であり，かつ単一である（ペロン・フロベ二ウスの定理）．

これらの具体的な応用先は次のようになる：

（１） $\lambda_{\max} = 1$ (Markov 行列，Google Page Ranking)

（２） $\lambda_{\max} > 1$ （人口問題）

（３） $\lambda_{\max} < 1$ （消費）

１．成分の総てが正　($a_{ij} > 0$)　である行列

次の性質を満たす正方行列 A を考える．

（１）すべての要素は正である．

最大の固有値 $\lambda_{\max}$ は正の実数であり，かつ単一である（ペロン・フロベ二ウスの定理）．

（２）すべての列においてその要素の和は１となる：$\sum_i a_{ij} = 1$

このとき A の最大固有値は１となる．（ペロン・フロベニウスの定理からこれが最大固有値であることも分かる．）

なぜなら

- 行列 $A = (a_{ij})$ の転置 ${}^tA \quad (({}^tA)_{ij} = a_{ji})$ は固有ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を持ち、

その固有値は１である．($\mathbf{p}$ は A の固有ベクトルではない，ことに注意．)

$\sum_j a_{ji} = 1$ は $\sum_j ({}^tA)_{ij} p_j = 1 \cdot p_i$ を意味する．言い換えれば，$\det({}^tA - E) = 0$ あるいは $\det(A - E) = 0$.

あるいは次のように言っても良い：

- 行列 A に対して，$A - E$ の全ての行の和は０である．これは $A - E$ の行ベクトルが線形従属であることを意味し，したがって $A - E$ は逆行列を持たないこと（$\det(A - E) = 0$）を意味する．すなわち，A は固有値１を持つ．

例１ 正のマルコフ行列　($a_{ij} > 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

```
A=[0.8 0.3;0.2 0.7];
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 2×2
    0.8321   -0.7071
    0.5547    0.7071
D = 2×2
    1.0000         0
         0    0.5000
```

```
A*V
```

```
ans = 2×2
    0.8321   -0.3536
    0.5547    0.3536
```

```
V*D
```

```
ans = 2×2
    0.8321   -0.3536
    0.5547    0.3536
```

```
A5=A^5
```

```
A5 = 2×2
    0.6125    0.5813
    0.3875    0.4188
```

```
A10=A^10
```

```
A10 = 2×2
    0.6004    0.5994
    0.3996    0.4006
```

```
A10*[.8321;.5547]
```

```
ans = 2×1
    0.8321
    0.5547
```

最大固有値が $\lambda_{\mathrm{mac}} = 1$ であり，それに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 0.8321 \\ 0.5547 \end{pmatrix}$ となる．この固有ベクトルが定常状態である．

全ての要素が正である行列A**についての性質**．最大固有値に対応する固有ベクトル（定常状態）を求める方法．

固有値を対象に並べた対角行列D，対応する順番で固有ベクトルを並べた行列をVと書いた．

最大固有値 λ_1 の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1$ と書こう．このとき，$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ であるから

$$A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A(\lambda_1\mathbf{v}_1) = (\lambda_1)^2\mathbf{v}_1$$

などとなり，

$$A^n\mathbf{v}_1 = (\lambda_1)^n\mathbf{v}_1$$

となる．

出発のベクトル$\mathbf{w}$ は $\mathbf{v}_1$ 以外のベクトル成分を含むとしよう．このとき場合には

$$\mathbf{w} = \sum a_k\mathbf{v}_k$$

と書かれる．これから

$$A\mathbf{w} = \sum a_k\lambda_k\mathbf{v}_k, \quad A^n\mathbf{w} = \sum a_k\lambda_k^n\mathbf{v}_k \simeq a_1\mathbf{v}_1$$

である．すなわち　最大固有値 $\lambda_1 = 1$ に対応する固有ベクトル成分 $a_1\mathbf{v}_1$ のみが残る．他の固有ベクトル方向の成分は縮小していくこととなる．

課題1

遷移確率行列の性質を満たす行列を，一様乱数から作る．

```
n=5;
U=rand(n);
V=U./vecnorm(U,1,1)
```

```
V = 5×5
    0.2401    0.0343    0.0468    0.0439    0.2080
    0.2669    0.0979    0.2879    0.1305    0.0113
    0.0374    0.1922    0.2839    0.2834    0.2693
    0.2692    0.3365    0.1440    0.2452    0.2962
    0.1864    0.3391    0.2374    0.2970    0.2152
```

上のスクリプトの各行が何をやっているか理解せよ．

次に，これに対して固有値，固有ベクトルを計算し，Markov行列としての性質を満たすことを確かめよ．

```
[P D]=eig(V)
```

```
P = 5×5 complex
  -0.2266 + 0.0000i   0.5411 + 0.0000i   0.0172 + 0.1904i   0.0172 - 0.1904i ⋯
  -0.3152 + 0.0000i  -0.1396 + 0.0000i   0.6757 + 0.0000i   0.6757 + 0.0000i
  -0.5138 + 0.0000i  -0.7162 + 0.0000i  -0.1661 + 0.3940i  -0.1661 - 0.3940i
  -0.5342 + 0.0000i   0.4076 + 0.0000i  -0.3413 - 0.3274i  -0.3413 + 0.3274i
  -0.5476 + 0.0000i  -0.0929 + 0.0000i  -0.1855 - 0.2570i  -0.1855 + 0.2570i
D = 5×5 complex
   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i ⋯
   0.0000 + 0.0000i   0.1668 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0351 + 0.1755i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0351 - 0.1755i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```

ここでMarkov行列Vの転置行列について固有値１に対応する固有ベクトルについて，この形を確かめておこう．

```
W=V'
```



```
W = 5×5
    0.2401    0.2669    0.0374    0.2692    0.1864
    0.0343    0.0979    0.1922    0.3365    0.3391
    0.0468    0.2879    0.2839    0.1440    0.2374
    0.0439    0.1305    0.2834    0.2452    0.2970
    0.2080    0.0113    0.2693    0.2962    0.2152
```

```
[Q S]=eig(W)
```

```
Q = 5×5 complex
   0.4472 + 0.0000i   0.7918 + 0.0000i  -0.2606 + 0.3961i  -0.2606 - 0.3961i ⋯
   0.4472 + 0.0000i  -0.1479 + 0.0000i  -0.2924 - 0.4368i  -0.2924 + 0.4368i
   0.4472 + 0.0000i  -0.3689 + 0.0000i  -0.2478 + 0.2814i  -0.2478 - 0.2814i
   0.4472 + 0.0000i  -0.2759 + 0.0000i  -0.0603 - 0.1810i  -0.0603 + 0.1810i
   0.4472 + 0.0000i   0.3728 + 0.0000i   0.5674 + 0.0000i   0.5674 + 0.0000i
S = 5×5 complex
   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i ⋯
   0.0000 + 0.0000i   0.1668 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0351 + 0.1755i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0351 - 0.1755i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```

さらに遷移確率行列 V の適当なべき乗を計算してみよ.

```
V^20
```

```
ans = 5×5
    0.1060    0.1060    0.1060    0.1060    0.1060
    0.1475    0.1475    0.1475    0.1475    0.1475
    0.2404    0.2404    0.2404    0.2404    0.2404
    0.2499    0.2499    0.2499    0.2499    0.2499
    0.2562    0.2562    0.2562    0.2562    0.2562
```

```
V*P
```

```
ans = 5×5 complex
  -0.2266 + 0.0000i   0.0902 + 0.0000i  -0.0340 - 0.0037i  -0.0340 + 0.0037i ⋯
  -0.3152 + 0.0000i  -0.0233 + 0.0000i  -0.0237 + 0.1186i  -0.0237 - 0.1186i
  -0.5138 + 0.0000i  -0.1194 + 0.0000i  -0.0633 - 0.0430i  -0.0633 + 0.0430i
  -0.5342 + 0.0000i   0.0680 + 0.0000i   0.0695 - 0.0484i   0.0695 + 0.0484i
  -0.5476 + 0.0000i  -0.0155 + 0.0000i   0.0516 - 0.0235i   0.0516 + 0.0235i
```

```
P*D
```

```
ans = 5×5 complex
  -0.2266 + 0.0000i   0.0902 + 0.0000i  -0.0340 - 0.0037i  -0.0340 + 0.0037i ⋯
  -0.3152 + 0.0000i  -0.0233 + 0.0000i  -0.0237 + 0.1186i  -0.0237 - 0.1186i
  -0.5138 + 0.0000i  -0.1194 + 0.0000i  -0.0633 - 0.0430i  -0.0633 + 0.0430i
  -0.5342 + 0.0000i   0.0680 + 0.0000i   0.0695 - 0.0484i   0.0695 + 0.0484i
  -0.5476 + 0.0000i  -0.0155 + 0.0000i   0.0516 - 0.0235i   0.0516 + 0.0235i
```

2 非負行列 ($a_{ij} \geq 0$)

これも遷移確率行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

これは $P=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ であるような分布が与えられたとき

$1/2p_1 \to p_2$ ，$1/2p_1 \to p_3$
$1/2p_2 \to p_1$ ，$1/2p_2 \to p_3$
$1/2p_3 \to p_1$ ，$1/2p_3 \to p_2$

というような移動を表していると理解することができる．（言い直せば

$p_1 \leftarrow 1/2p_2+1/2p_3$ ；$p_12 \leftarrow 1/2p_1+1/2p_3$ ；$p_3 \leftarrow 1/2p_1+1/2p_2$)

従って n ステップ後の分布は

$P^{(n)}=A^nP$

で与えられ，分布の最も主要な様子は，A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に支配される．

上の様な解析により，Google のページ・ランキングが決められている．

それぞれのWebサイトを訪れた人が次にどこに行くかというデータを得れば，

最終的な定常状態（ランキング）を知ることができる．

課題2

上の問題で $P^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ から出発して定常状態 $(n \to \infty)$ の様子を考えよ．

またこの振る舞いと A 行列の固有値の関係を考察せよ．

```
A=[0 0.5 0.5;0.5 0 0.5; 0.5 0.5 0]
```

```
A = 3×3
         0    0.5000    0.5000
    0.5000         0    0.5000
    0.5000    0.5000         0
```

```
A2=A^2
```

```
A2 = 3×3
    0.5000    0.2500    0.2500
    0.2500    0.5000    0.2500
    0.2500    0.2500    0.5000
```

を計算すれば分かるように，A2 には0の要素が消える．

```
A3=A^3
```

```
A3 = 3×3
    0.2500    0.3750    0.3750
    0.3750    0.2500    0.3750
```

```
    0.3750    0.3750    0.2500
```

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
   -0.7152    0.3938    0.5774
    0.0166   -0.8163    0.5774
    0.6987    0.4225    0.5774
D = 3×3
   -0.5000         0         0
         0   -0.5000         0
         0         0    1.0000
```

```
A^(20)
```

```
ans = 3×3
    0.3333    0.3333    0.3333
    0.3333    0.3333    0.3333
    0.3333    0.3333    0.3333
```

```
A*[1;0;0]
```

```
ans = 3×1
         0
    0.5000
    0.5000
```

```
A^(10)*[1;0;0]
```

```
ans = 3×1
    0.3340
    0.3330
    0.3330
```

2. 人口増加

人工増加の問題を考えてみよう．人口構成を荒っぽく

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

で表そう．p_1は若年層の数，p_2は壮年層の数，p_3は老年層の数とする．

ある時の人口の変化を次の行列で表そう：

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列はMarkov行列であり，ペロン－フロベニウスの定理は成り立つ．最大固有値は1となる．

これから後の人口の変化を議論しよう．

$P = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ から出発する.

```
A=[0.7 0 0;0.3 0.9 0; 0 0.1 1]
```

```
A = 3×3
    0.7000         0         0
    0.3000    0.9000         0
         0    0.1000    1.0000
```

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
         0         0    0.5345
         0    0.7071   -0.8018
    1.0000   -0.7071    0.2673
D = 3×3
    1.0000         0         0
         0    0.9000         0
         0         0    0.7000
```

```
A*V
```

```
ans = 3×3
         0         0    0.3742
         0    0.6364   -0.5612
    1.0000   -0.6364    0.1871
```

```
V*D
```

```
ans = 3×3
         0         0    0.3742
         0    0.6364   -0.5612
    1.0000   -0.6364    0.1871
```

```
P1=[1;0;0];
P2=[0;1;0];
P3=[0;0;1];
A2=A*A
```

```
A2 = 3×3
    0.4900         0         0
    0.4800    0.8100         0
    0.0300    0.1900    1.0000
```

```
A3=A^3
```

```
A3 = 3×3
    0.3430         0         0
    0.5790    0.7290         0
    0.0780    0.2710    1.0000
```

```
A20=A^(20)
```

```
A20 = 3×3
    0.0008         0         0
    0.1812    0.1216         0
    0.8180    0.8784    1.0000
```

```
P1_20=A20*P1
```

```
P1_20 = 3×1
    0.0008
    0.1812
    0.8180
```

```
P2_20=A20*P2
```

```
P2_20 = 3×1
         0
    0.1216
    0.8784
```

```
P3_1=A*P3
```

```
P3_1 = 3×1
     0
     0
     1
```

課題3

毎年、80%の年少者が年長者になり，年長者の10%が死亡する（生まれるものはいない）.

$$\begin{pmatrix} \text{年少者} \\ \text{年長者} \\ \text{死者} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.0 & 0 \\ 0.8 & 0.9 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{年少者} \\ \text{年長者} \\ \text{死者} \end{pmatrix}_{k}$$

この定常状態を求めよ.

こちらは非負のマルコフ行列であり，遷移確率行列である.

```
A=[0.20 0 0;0.8 0.9 0;0 0.1 1]
```

```
A = 3×3
    0.2000         0         0
    0.8000    0.9000         0
         0    0.1000    1.0000
```

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
         0         0    0.6556
         0    0.7071   -0.7493
    1.0000   -0.7071    0.0937
D = 3×3
    1.0000         0         0
         0    0.9000         0
         0         0    0.2000
```

```
A^5
```

```
ans = 3×3
    0.0003         0         0
    0.6745    0.5905         0
    0.3252    0.4095    1.0000
```

```
A^(10)
```

```
ans = 3×3
    0.0000         0         0
    0.3985    0.3487         0
    0.6015    0.6513    1.0000
```

```
A^(20)
```

```
ans = 3×3
    0.0000         0         0
    0.1389    0.1216         0
    0.8611    0.8784    1.0000
```

```
A^(30)
```

```
ans = 3×3
    0.0000         0         0
    0.0484    0.0424         0
    0.9516    0.9576    1.0000
```

課題4

また毎年、80%の年少者が年長者になり，年長者の10%が死亡する．さらに年長者の20%が新たに子供を持つ.

$$\begin{pmatrix} \text{年少者} \\ \text{年長者} \\ \text{死者} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.9 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{年少者} \\ \text{年長者} \\ \text{死者} \end{pmatrix}_{k}$$

この場合にはどうなるか.

```
A=[0.2 0.2 0;0.8 0.9 0;0 0.1 1]
```

```
A = 3×3
    0.2000    0.2000         0
    0.8000    0.9000         0
         0    0.1000    1.0000
```

```
[V D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
         0    0.1419    0.7388
         0    0.6254   -0.6705
    1.0000    0.7673    0.0683
D = 3×3
    1.0000         0         0
         0    1.0815         0
         0         0    0.0185
```

```
A^2
```

```
ans = 3×3
    0.2000    0.2200         0
    0.8800    0.9700         0
    0.0800    0.1900    1.0000
```

```
[Vp Dp]=eig(A^2)
```

```
Vp = 3×3
         0    0.1419    0.7388
         0    0.6254   -0.6705
```

```
    1.0000    0.7673    0.0683
Dp = 3×3
    1.0000         0         0
         0    1.1697         0
         0         0    0.0003
```

```
A5=A^5
```

```
A5 = 3×3
    0.2526    0.2784         0
    1.1135    1.2270         0
    0.3662    0.5054    1.0000
```

```
A10=A^(10)
```

```
A10 = 3×3
    0.3738    0.4119         0
    1.6476    1.8154         0
    1.0214    1.2273    1.0000
```

```
A20=A^(20)
```

```
A20 = 3×3
    0.8184    0.9017         0
    3.6069    3.9744         0
    3.4253    3.8762    1.0000
```

```
A30=A^(30)
```

```
A30 = 3×3
    1.7916    1.9741         0
    7.8965    8.7010         0
    8.6881    9.6751    1.0000
```

3. 消費（Leontief, 産業関連表=Input-Output Table）

経済における製造と消費の問題を考えてみよう.

産業における製造物が3種に分けられ，その構成を

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

で表す．この３つの製造物の製造過程での消費を

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

で表す．すなわち，

第1行の意味は，第1の製造物を1単位製造するためには，第1の製造物の0.2単位，第2の製造物の0.3単位，第3の製造物の0.4単位を必要とすることを表す.

第2行の意味も，第2の製造物を1単位製造するために必要なそれぞれの製造物の単位である．第3行についても同様である.

```
A=[0.2 0.3 0.4 ;0.4 0.4 0.1; 0.5 0.1 0.3]
```

```
A = 3×3
    0.2000    0.3000    0.4000
    0.4000    0.4000    0.1000
    0.5000    0.1000    0.3000
```

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
   -0.5774   -0.7308    0.1141
   -0.5774    0.3519   -0.7858
   -0.5774    0.5849    0.6078
D = 3×3
    0.9000         0         0
         0   -0.2646         0
         0         0    0.2646
```

ある年の製造物の構成が$\mathbf{P}$であるとする．

そのときこれを製造するのに必要な（消費される）量は$A\mathbf{P}$である．したがって純生産量は

$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - A\mathbf{P} = (E - A)\mathbf{P}$

となる．すなわち，生産量$\mathbf{P}$の内$A\mathbf{P}$が$\mathbf{P}$の生産のために使われ，$\mathbf{Q}$が市場に回せる生産となる．

市場で期待される生産量が$\mathbf{Q}$であるとき，製造すべき量$\mathbf{P}$はどうでなくてはいけないか.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であればどうか.

```
IA=eye(3)-A
```

```
IA = 3×3
    0.8000   -0.3000   -0.4000
   -0.4000    0.6000   -0.1000
   -0.5000   -0.1000    0.7000
```

```
IA\eye(3)
```

```
ans = 3×3
    4.4086    2.6882    2.9032
    3.5484    3.8710    2.5806
    3.6559    2.4731    3.8710
```

```
inv(IA)*[1;2;1]
```

```
ans = 3×1
   12.6882
   13.8710
   12.4731
```


問題

行列Aの固有値を計算し，最大固有値とそれに対応する固有ベクトルに注目しよう．この経済が成り立つためには，最大固有値が正で 1 より小さくなくてはいけない．それはなぜか考察せよ．

```
[V D]=eig(A)
```

```
V = 3×3
   -0.5774   -0.7308    0.1141
   -0.5774    0.3519   -0.7858
   -0.5774    0.5849    0.6078
D = 3×3
    0.9000         0         0
         0   -0.2646         0
         0         0    0.2646
```

課題5

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

ではどうか．この経済を議論せよ．

```
A=[0.5 0.2;0.4 0.1]
```

```
A = 2×2
    0.5000    0.2000
    0.4000    0.1000
```

```
[V D]=eig(A)
```

```
V = 2×2
    0.8069   -0.3437
    0.5907    0.9391
D = 2×2
    0.6464         0
         0   -0.0464
```