二封筒問題　Two Envelope Problem

パラドクスの構成（*真なる諸前提に妥当な推論を施して不合理な結論を導く*）

①　二つの未開封封筒の一方には他方の２倍の金額が入っている。

②　一方を選ぶ。その封筒Ａの中の金を獲得できる。

③　封筒Ａを放棄して、始めに取らなかった方の封筒Ｂに交換し、その中の金を獲得することもできる。交換すべきか否か。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

④　Ａの中の金額をｘとすれば、Ｂの中の金額は２ｘまたはｘ／２、それぞれ確率１／２。

⑤　よって、期待値はＡがｘ、Ｂが５ｘ／４で、交換すると期待値25%アップで、得。

⑥　それは誤り。対称性の原理から、未開封で不可識別の封筒のどちらを取っても期待値は同じはず。

⑦　（Ａ、Ｂ）＝（ｘ、２ｘ）or（ｘ、ｘ／２）としてはならない。プレイヤーの選択によって総額が今さら変化するはずはないから。

⑧　総額は胴元が２封筒内に金を入れた時点で決まっているので、総額を一定額（たとえば３Ｘ）と置かなければならない。ただし総額不明なので、Ｘは変数。

⑨　つまり（Ａ、Ｂ）＝（Ｘ、２Ｘ）or（２Ｘ、Ｘ）とすべし。それぞれ確率１／２だから、期待値はＡが３ｘ／２、Ｂが３ｘ／２で交換は損得なし。常識に合致している。

⑩　未開封バージョンは以上で決着。では、手もとのＡを開封しよう。Ａは１万円だった。

⑪　これは、⑨で Ｘ＝１万 or ２Ｘ＝１万 だったという意味である。

⑫　すなわち、（Ａ、Ｂ）＝（１万、２万）or（１万、５千）。それぞれ確率１／２

⑬　Ｂに交換したときの期待値は、１２５００円。交換が得である。

⑭　⑩で「１万円」としたのは単なる例だから、Ａを開封したときに、１万円以外のどんな金額であっても、同じ理屈が成り立つ。

⑮　つまりどんな金額の場合も、Ｂに交換したとき期待値25%アップ、という計算結果は同じ。Ａを開封して金額を見ることは、２つの封筒の中身を変化させはしないので。

⑯　Ａの金額にかかわらず、Ｂに交換したとき期待値25%アップとなる。

⑰　「Ａの金額にかかわらずＢに交換することが、期待値25%アップ」であるならば、Ａの金額を見るかどうかは期待値変化率に影響しない。

⑱　⑯と⑰より、Ａの金額を見ないままでも、期待値変化率に影響しない。交換で期待値25%ということで変わらず。

⑲　よって、未開封のままでも、交換することで期待値が25%アップし、得。

⑳　⑲は⑤と同じである。ところが、⑲は真で、⑤は偽であったはず。

㉑　これは矛盾である。どこかに誤りがあったに違いない。どこだろう？

有力な解法その１

⑫が誤りである。（A、B）＝（１万、２万）or（１万、５千）であるが、それぞれの確率を１／２とすることはできない。　　ベイズの定理で丁寧に計算してみよう。

　Q……私はAに１万円を見出した
R……胴元は｛１万、２万｝を選んだ　　　S……胴元は｛５千、１万｝を選んだ

P（R｜Q）＝P（Q｜R）P（R）／（P（Q｜R）P（R）＋P（Q｜S）P（S））
＝P（R）／（P（R）＋P（S））
P（S｜Q）＝P（S）／（P（R）＋P（S））

この二つが１／２であるのは、P（R）＝P（S）の場合だけ。
つまり、RとSの事前確率が等しくなければならない。
事前確率は、事前に（未開封の段階で）決められねばならない。
しかし、未開封の段階で、｛１万、２万｝と｛５千、１万｝の確率などわかるわけがない。他に多くの候補があったのだし、胴元の自由意思は推測しようがないので。
唯一、P（R）＝P（S）とするのが合理的であるのは、一様分布をとる場合である。
実際、無知の場合には原則として「無差別の原理」（理由不十分の原理）により、ありうるすべての事象の確率を等確率と置ける。
しかし２封筒問題では、一様分布は不可能である。金額ペアは無限にあるので、P（R）＝P（S）の値を含むすべての値を同一のａと置くと、その総和が無限大となってしまい、確率の公理に反する。
よって、P（R）＝P（S）とする合理的理由がない。
したがって、P（R｜Q）＝P（S｜Q）＝１／２としてはならない。

？１●　「事前確率は、事前に（未開封の段階で）決められねばならない」は正しいか。
？２●　事象を（１万、２万）or（１万、５千）でなく、（高額、低額）or（低額、高額）とすべきではないか。全開封金額を通じた（高額、低額）の確率の期待値は、1/2 である。
？３●　Qという情報が与えられたことによって、P（高額、低額）＝1/2 から「不明」に変化する、というのは、ベイズ推定の運用に反しているのではないか。いったん「不明」を許容すると、以後のベイズ改訂ができなくなってしまう。
？４●　同じことは、任意のｘ≠ｙについて言える。選んだ方をｘとして、P（ｘ＞ｙ）は明らかに１／２なのに、ｘの値ｔを知った瞬間、P（ｔ＞ｙ）は不明になってしまう。ｔがどんな値であれ。……ならばｔを知る前からP（ｘ＞ｙ）は１／２ではなく「不明」ではないのか。→パラドクスの復活？

有力な解法その２

⑱が誤りである。⑯と⑰前件とは、意味が異なる。⑯は真で、⑰前件は偽だから。
「Ａの金額にかかわらず、Ｂに交換したとき期待値 25%アップ」から、「Ａの金額にかかわらずＢに交換することが、期待値 25%アップ」は導き出せない。Ａを特定するかどうかは大きな違いである。

「Ａの金額にかかわらず、Ｂに交換したとき期待値 25%アップ」（開封して交換したとき期待値 25%アップ）を正確に言い換えると、
「いかなる金額ｘについてもそれぞれ戦略ｙがあり、ｙによって期待値が 1.25ｘとなる」
∀ｘ（∃ｙＦｘｙ）　　　　　Ｆｘｙは、ｙによりｘが 1.25 倍になる　と読む。
「Ａの金額にかかわらずＢに交換することは、そうしないよりも期待値 25%アップ」（未開封のまま交換したとき期待値 25%アップ）を正確に言い換えると、
「いかなる金額ｘについても期待値が 1.25ｘとなるような、特定の戦略ｙがある」
∃ｙ（∀ｘＦｘｙ）

∃ｙ（∀ｘＦｘｙ）　から　∀ｘ（∃ｙＦｘｙ）　は導けるが、
∀ｘ（∃ｙＦｘｙ）　から　∃ｙ（∀ｘＦｘｙ）　は導けない。
未開封交換で期待値 25%アップなら開封交換でも 25%アップ、は可だが、逆は不可。

∃ｙ（∀ｘＦｘｙ）　→　∀ｘ（∃ｙＦｘｙ）　は成り立ち、逆は成り立たない具体例
◎すべての人が誰かを愛する　からといって　すべての人が愛するような誰かがいるとは限らない
◎どの自然数についても、より大きな自然数がある　からといって　どの自然数より大きな自然数がある　とは限らない

１万円を見て交換する、という戦略は、２万円を見て交換する、という戦略とは異なる。どの金額についても期待値 25%アップ戦略がそれぞれ存在する　からといって　どの金額についても期待値 25%アップとなるような特定の戦略　は存在しない
金額ごとに、「その金額を交換する」という期待値 25%アップ戦略があるだけのことであり、全交換で期待値 25%アップをもたらす戦略があるわけではない。

？１●　Ｘ円を見て交換する、という戦略の「Ｘ」は、開封して見る前に決定しておかねば無意味ではないか。金額後決め戦略は、実質的に、全交換戦略になりはしないか。
？２●　ただ一度の試行で、二人のプレイヤーが別々の封筒を取った場合も、「交換すると二人とも期待値 25%アップ」となるが、それは矛盾ではないのか。

可能世界と主観確率　　http://green.ap.teacup.com/miurat/html/asahi.pdf

念のため　**ベイズの定理**　を確認

命題Ａが真である確率を、Ｐ（Ａ）
命題Ｄが真であるという条件のもとで、Ａが真である確率を、Ｐ（Ａ｜Ｄ）　　と書く。
仮説Ａ、Ｂをそれぞれデータ Ｄに条件づけて、Ｐ（Ａ｜Ｄ）　と　Ｐ（Ｂ｜Ｄ）を考える。

Ｐ（Ａ｜Ｄ）＝Ｐ（ＡかつＤ）／Ｐ（Ｄ）＝Ｐ（Ｄ｜Ａ）Ｐ（Ａ）／Ｐ（Ｄ）
Ｐ（Ｂ｜Ｄ）＝Ｐ（ＢかつＤ）／Ｐ（Ｄ）＝Ｐ（Ｄ｜Ｂ）Ｐ（Ｂ）／Ｐ（Ｄ）

分子であるＰ（ＡかつＤ）がＰ（Ｄ｜Ａ）Ｐ（Ａ）に等しいとされているが、これは、確率の意味を考えれば（可能的事象の比率であることを考えれば）納得しやすいだろう。
分母のＰ（Ｄ）の値は、Ａ、Ｂが互いに背反で網羅的のとき、
Ｐ（Ｄ）＝Ｐ（ＡかつＤ）＋Ｐ（ＢかつＤ）＝Ｐ（Ｄ｜Ａ）Ｐ（Ａ）＋Ｐ（Ｄ｜Ｂ）Ｐ（Ｂ）

↑これで計算してもよいが、上の二式の比をとることでＰ（Ｄ）を消すことができる↓

Ｐ（Ａ｜Ｄ）／Ｐ（Ｂ｜Ｄ）＝（Ｐ（Ｄ｜Ａ）／Ｐ（Ｄ｜Ｂ））×（Ｐ（Ａ）／Ｐ（Ｂ））

この式により、〈Ｄを得る前のＡ、Ｂの事前確率に比べて、Ｄを得た後のＡ、Ｂの事後確率がどう変わるか〉が、以下のように判定できる。

Ｐ（Ｄ｜Ａ）／Ｐ（Ｄ｜Ｂ）＞１
　　　つまりＢが真である場合よりＡが真である場合の方がＤが起こりやすければ、
Ｐ（Ａ｜Ｄ）／Ｐ（Ｂ｜Ｄ）＞（Ｐ（Ａ）／Ｐ（Ｂ））
……データＤは仮説Ａに有利に働く（Ａを確証する）

Ｐ（Ｄ｜Ａ）／Ｐ（Ｄ｜Ｂ）＝１　　つまりＡが真でもＢが真でもＤにとって同じならば、
Ｐ（Ａ｜Ｄ）／Ｐ（Ｂ｜Ｄ）＝（Ｐ（Ａ）／Ｐ（Ｂ））
……データＤは仮説Ａ、仮説Ｂに対して中立

Ｐ（Ｄ｜Ａ）／Ｐ（Ｄ｜Ｂ）＜１
　　　つまりＡが真である場合よりＢが真である場合の方がＤが起こりやすければ、
Ｐ（Ａ｜Ｄ）／Ｐ（Ｂ｜Ｄ）＜（Ｐ（Ａ）／Ｐ（Ｂ））
……データＤは仮説Ｂに有利に働く（Ｂを確証する）