

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅳ2017 楠岡成雄

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限って、特に記載のない限り、クリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下で利用することができます。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



## 数理手法IV 演習問題 5

演習問題 5-1.  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$  に対して、 $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $\{a\}$  は  $\mathbf{R}$  のボレル加法族 (Borel algebra) の元であることを示せ。

演習問題 5-2.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間、 $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  は確率変数とする。さらに、 $A_n(x) = \{X_n > x\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , とおく。

以下の事象を  $A_n(x)$  及び集合の記号  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $^c$  を高々可算回用いて表せ。

(0)  $B_1 = \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) > X_2(\omega)\}$

$B_2 = \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) \geq X_2(\omega)\}$

(1)  $C_1 = \{\omega \in \Omega; \sup_{n \geq 1} X_n(\omega) > 0\}$

(2)  $C_2 = \{\omega \in \Omega; \sup_{n \geq 1} X_n(\omega) \geq 0\}$

(3)  $C_3 = \{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \infty\}$

(4)  $C_4 = \{\omega \in \Omega; \{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \text{ が収束する} \} (= \{\omega \in \Omega; \{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \text{ は Cauchy 列} \})$

問題の解説と解答例:  $B_1$  は

$$B_1 = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) > x \geq X_2(\omega)\} = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} (A_1(x) \cap A_2(x)^c)$$

と表せるが、これでは非可算回  $\cap$  を用いることになる。しかし、

$$B_1 = \bigcup_{x \in \mathbf{Q}} (A_1(x) \cap A_2(x)^c)$$

と表せば、可算回ですむ。 $B_2$  はさらに複雑であるが

$$B_2 = \{\omega \in \Omega; \text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して } X_1(\omega) + \frac{1}{n} > X_2(\omega)\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{x \in \mathbf{Q}} (A_1(x - \frac{1}{n}) \cap A_2(x)^c) \right)$$

と表される。

演習問題 5-3.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間とする。 $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  は「 $n$  回目に硬貨を投げた時、表が出る」という事象を表すものとする。すると、「1 回目、2 回目ともに表が出る」という事象は  $A_1 \cap A_2$  で表されることになる。では以下の事象を  $A_n$  及び集合の記号  $\cup$  (合併),  $\cap$  (共通部分),  $^c$  (補集合) を高々可算回用いて表せ。

(1) 表が出る回数が有限回であるという事象  $B_0$

(2) 表が無限回出るという事象  $B_1$

(3) 表が3回連続して出ることが無限にあるという事象  $B_2$