

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅳ2017 楠岡成雄

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限って、特に記載のない限り、クリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下で利用することができます。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



## 数理手法IV 演習問題 4

- 演習問題 4-1. (1)  $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  とする。  $\tau \equiv m$  は停止時刻であることを示せ。  
(2)  $\sigma, \tau$  は停止時刻とする。この時、  $\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau, \sigma + \tau$  も停止時刻であることを示せ。  
(3) 停止時刻  $\sigma$  に対して  $\mathcal{F}_\sigma$  が部分加法族となることを示せ。

演習問題 4-2.  $N \geq 2, \Omega = \{(z_1, z_2, \dots, z_N); z_1, \dots, z_N = 0, 1\} = \{0, 1\}^N, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$   
とし  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  を

$$P(A) = \frac{1}{2^N} (A \text{ に属する元の個数}), \quad A \in \mathcal{F}$$

で定めると  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  は確率空間となる。

今、確率変数  $X_n: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, n = 0, 1, 2, \dots,$  を

- (i)  $n = 0$  または  $n \geq N + 1$  の時、  $X_n = 0,$   
(ii)  $n = 1, 2, \dots, N$  の時、  $X_n((z_1, z_2, \dots, z_N)) = z_n$

により定義する。

また、部分加法族  $\mathcal{F}_n, n \geq 0,$  を  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}, n \geq 1,$  で定める。  
この時、  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$  はフィルトレーションとなる。

- (1)  $\tau: \Omega \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  を

$$\tau(\omega) = \min\{n \geq 0; X_n(\omega) = 1\}$$

で定める。ただし、  $\min \emptyset = \infty$  とする。

$\tau$  は停止時刻であることを示せ。

また、  $N = 2$  の時、  $\mathcal{F}_\tau$  の原子をすべて挙げよ。

- (2)  $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  を

$$\sigma(\omega) = \min\{n \geq 0; X_{n+1}(\omega) = 1\}$$

で定める。

$N \geq 2$  の時、  $\sigma$  は停止時刻ではないことを示せ。