数理手法IV演習問題 4

演習問題 4-1. (1) $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ とする。$\tau \equiv m$ は停止時刻であることを示せ。
(2) σ, τ は停止時刻とする。この時、$\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau, \sigma + \tau$ も停止時刻であることを示せ。
(3) 停止時刻 σ に対して $\mathcal{F}_\sigma$ が部分加法族となることを示せ。

演習問題 4-2. $N \geqq 2, \Omega = \{(z_1, z_2, \ldots, z_N);\ z_1, \ldots, z_N = 0, 1\} = \{0,1\}^N, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ とし $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ を

$$P(A) = \frac{1}{2^N}\ (\ A \text{ に属する元の個数 }), \qquad A \in \mathcal{F}$$

で定めると $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間となる。
今、確率変数 $X_n : \Omega \to \mathbf{R}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ を
(i) $n = 0$ または $n \geqq N + 1$ の時、$X_n = 0$,
(ii) $n = 1, 2, \ldots, N$ の時、$X_n((z_1, z_2, \ldots, z_N)) = z_n$
により定義する。
また、部分加法族 $\mathcal{F}_n, n \geqq 0$, を $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}. n \geqq 1$, で定める。この時、$\{\mathcal{F}_n\}_{n \geqq 0}$ はフィルトレーションとなる。

(1) $\tau : \Omega \to \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ を

$$\tau(\omega) = \min\{n \geqq 0;,\ X_n(\omega) = 1\}$$

で定める。ただし、 $\min \emptyset = \infty$ とする。
τ は停止時刻であることを示せ。
また、$N = 2$ の時、$\mathcal{F}_\tau$ の原子をすべて挙げよ。

(2) $\sigma : \Omega \to \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ を

$$\sigma(\omega) = \min\{n \geqq 0;,\ X_{n+1}(\omega) = 1\}$$

で定める。
$N \geqq 2$ の時、σ は停止時刻ではないことを示せ。