

クレジット:

UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 坪井 俊

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



先週のミニッツレポートから:

新しい単語が次々と出てくる。 数学では「概念」に名前を付けて使うので、単語は使いながらわかるものです。

点 x の近傍とは ? 点 x から或る距離 ε 以下の点を含む集合

射影平面 RP^2 ?

クラインの壺 $K1$?

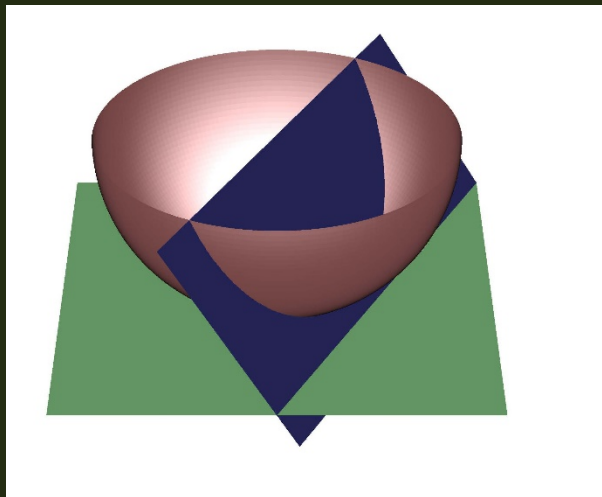
射影平面はメビウスの帯と円板を境界に沿って貼り合わせたもの
クラインの壺はメビウスの帯を2つ境界に沿って貼り合わせたもの



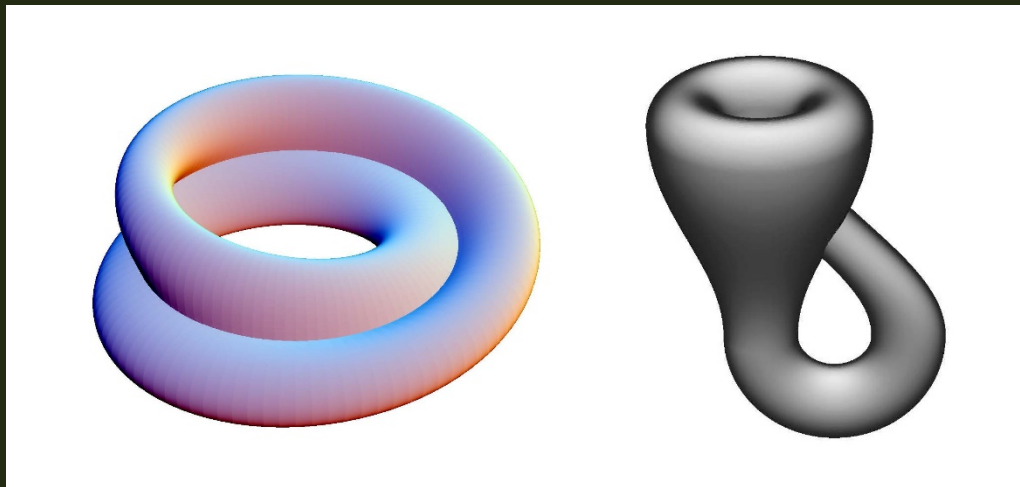
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



RP^2



KI



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

トーラスのオイラー数？

格子を変形したときに、ディリクレ領域はどう変化するか？

オービフォールドの例？ 正四面体

オービフォールドは、軌道空間が持つべき性質を
局所的には持っている空間。

曲面は、2次元の多様体マニフォールドである。
マニフォールドは、ユークリッド空間が持つべき性質を
局所的には持っている空間。

軌道空間の局所的な形状は、

$[x \text{ の } G \text{ 軌道}]$ では、 x の近傍の G 軌道で定まる。

頂角 $\frac{2\pi}{n}$ の円錐、頂角 $\frac{\pi}{n}$ の扇型



東京大学大学院数理科学研究科

Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学

THE UNIVERSITY OF TOKYO

群の作用 $G \times F \rightarrow F : (g, x) \mapsto g(x)$ ($g(h(x)) = (gh)(x)$)
について、 x の **G 軌道** は $\{g(x) \mid g \in G\}$ で定義される。
同じ**軌道**に属することは、**同値関係**で、その同値類の集合が軌道空間。
軌道空間を **F/G** と書く。

『 軌道空間のイメージ：
対称性のある無限に広い空間を歩いて見える景色が、
その上を歩いて見える景色と同じになるような有限で閉じた空間 』



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

学術俯瞰講義「図形から広がる数理科学」

周期性と対称性

空間を埋め尽くす多面体

2016年6月9日

東京大学大学院数理科学研究科

坪井 俊



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- 前回は、コンパクト2次元平坦オービフォールドが17種類であることを説明しました。
- これが、平面上の周期性と対称性を持つ図形が17種類であることを説明しています。
- 言葉を変えていうと平面を周期的に埋め尽くす多角形は17種類の多角形から、「変形」により得られることになります。
- 3次元の周期性と対称性をもつ図形についても、その等長変換群を分類します。
- 等長変換群が3つの独立な方向の平行移動を含む場合に、周期性と対称性をもつと定義されます。
- 3次元平坦オービフォールドは3次元ユークリッド空間の等長変換群による軌道空間として定義されます。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- コンパクトな3次元の平坦オービフォールドの分類をすれば、3次元空間の周期性と対称性をもつ図形が分類されます。
- このような方法は、Thurston(1946-2012)という数学者によるもので、3次元の場合の論文は2001年にJohn H. Conway, Olaf Delgado Friedrichs, Daniel H. Huson, William P. Thurstonの共著として、「On Three-Dimensional Space Groups」という題名でContributions to Algebra and Geometry, Volume 42 (2001), No. 2, 475-507に出版されています。(題名で検索して論文を読むことができます。)
- 3次元の周期性と対称性をもつ図形は、219通りあり、鏡像を区別すると230通りあることは、19世紀の終わりごろには証明されていました。

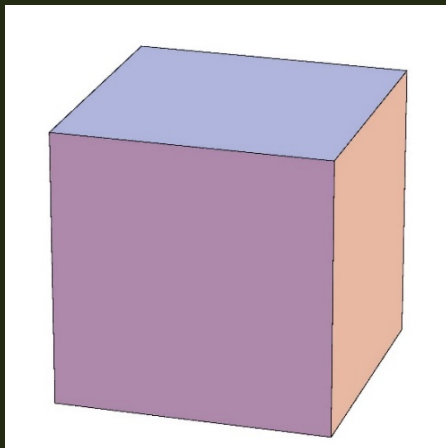
By George M. Bergman From Wikimedia Commons
(ref. 2017/5/18) CC BY-SA 3.0



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

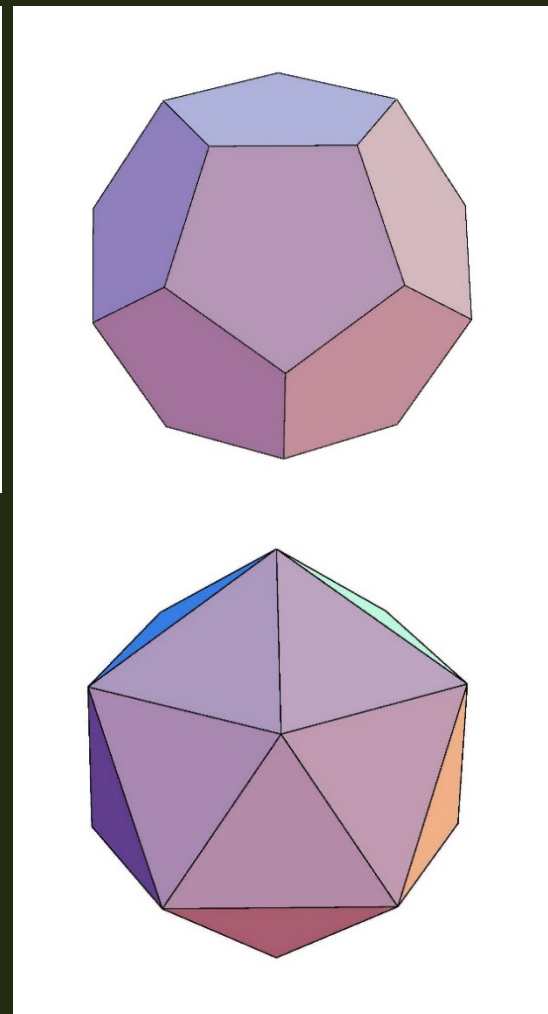
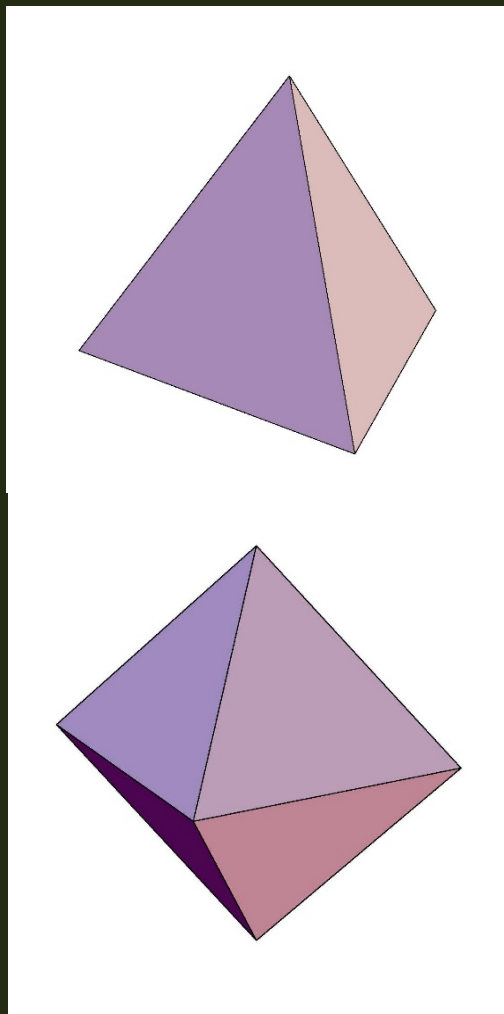


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



クイズ:

- 5つある正多面体で、1種類だけで空間を埋め尽くすものは立方体以外にあるか？
- 正四面体と正八面体を使って空間を埋め尽くすことができるか？



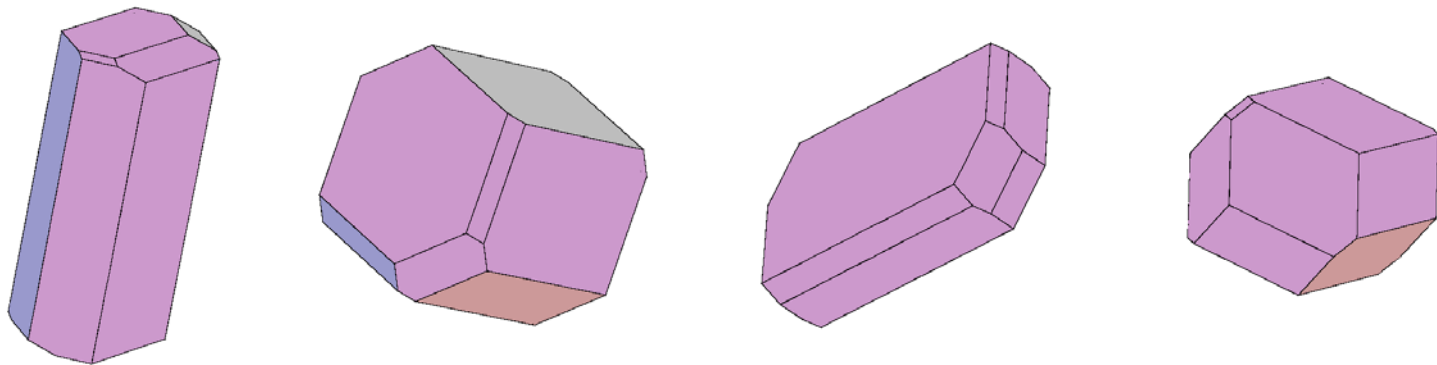
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1. 3次元の格子の対称性

- 3つの独立なベクトルの方向の平行移動で生成される3次元ユークリッド空間への群作用について、3つのベクトルを辺とする平行6面体は基本領域であるが、ほとんどの場合、ディリクレ領域にはならない。
- このときのディリクレ基本領域は、多くの場合、六角形8個と4角形6個の14面体になる。その様子は、切頂八面体とほぼ同様である。

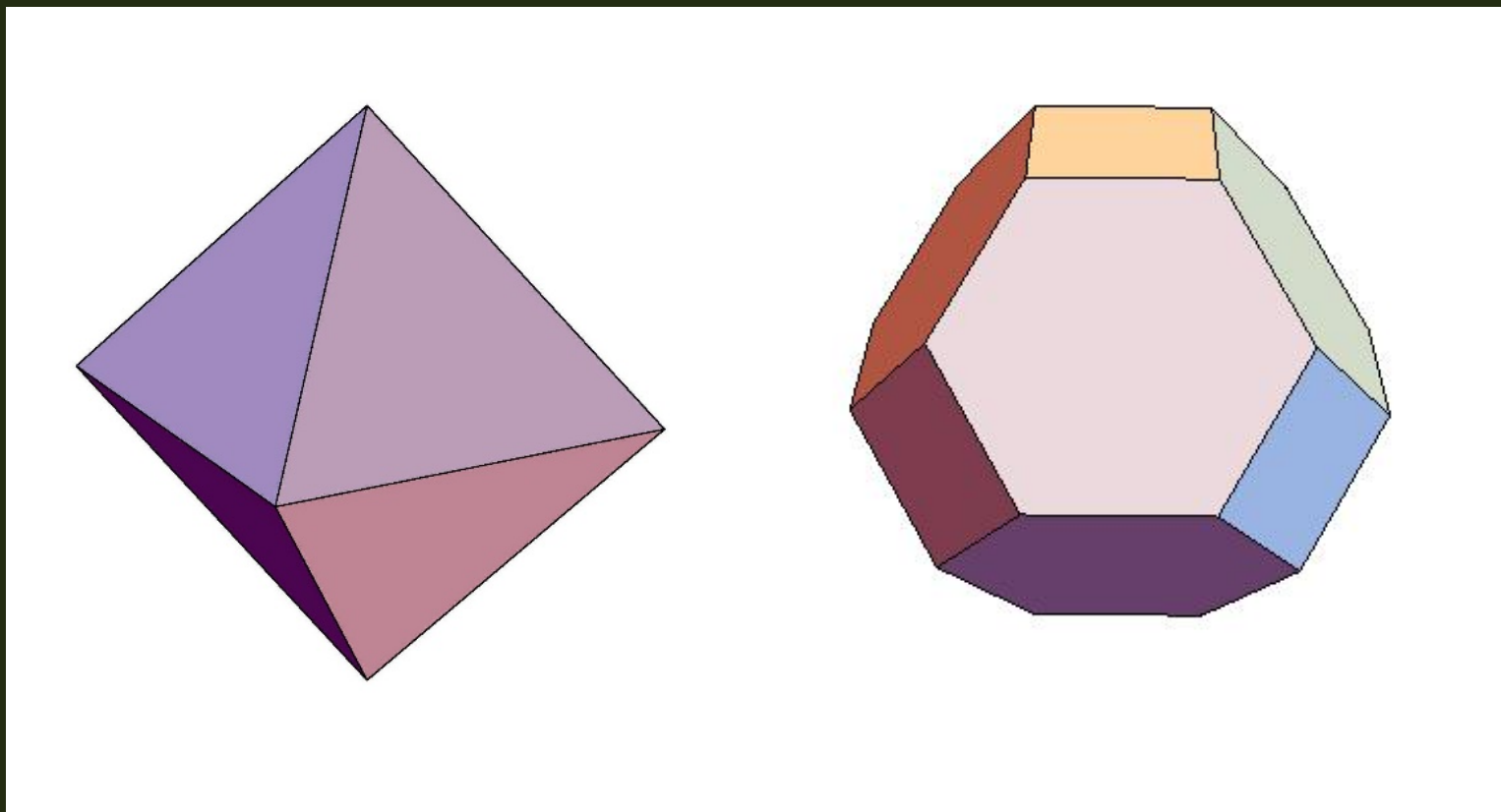


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

ここでいう切頂八面体は、正八面体の辺を3等分する点を結んで頂点の周りにできる四角錐を取り除いたものです。



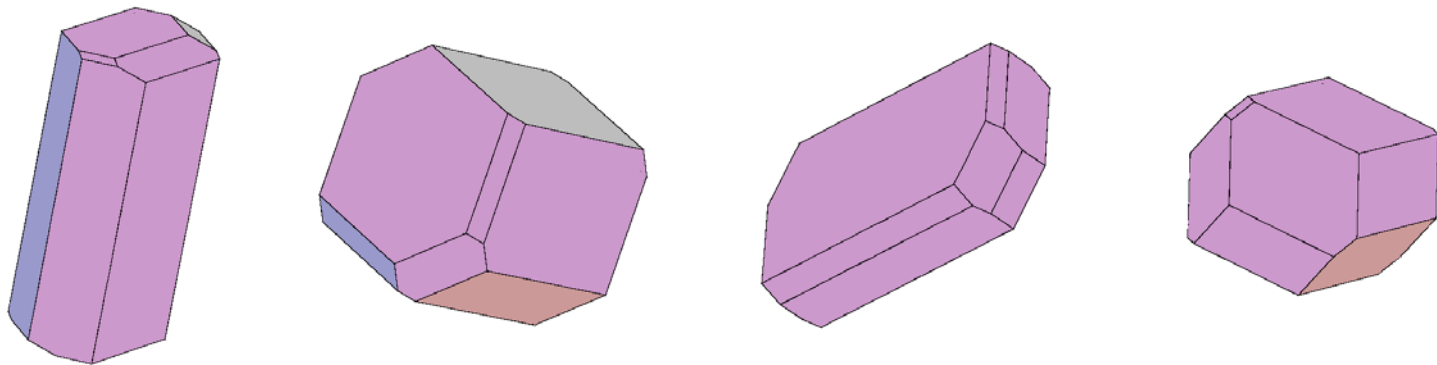
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1. 3次元の格子の対称性

- 3つの独立なベクトルの方向の平行移動で生成される3次元ユークリッド空間への群作用について、3つのベクトルを辺とする平行6面体は基本領域であるが、ほとんどの場合、ディリクレ領域にはならない。
- このときのディリクレ基本領域は、多くの場合、六角形8個と4角形6個の14面体になる。その様子は、切頂八面体とほぼ同様である。

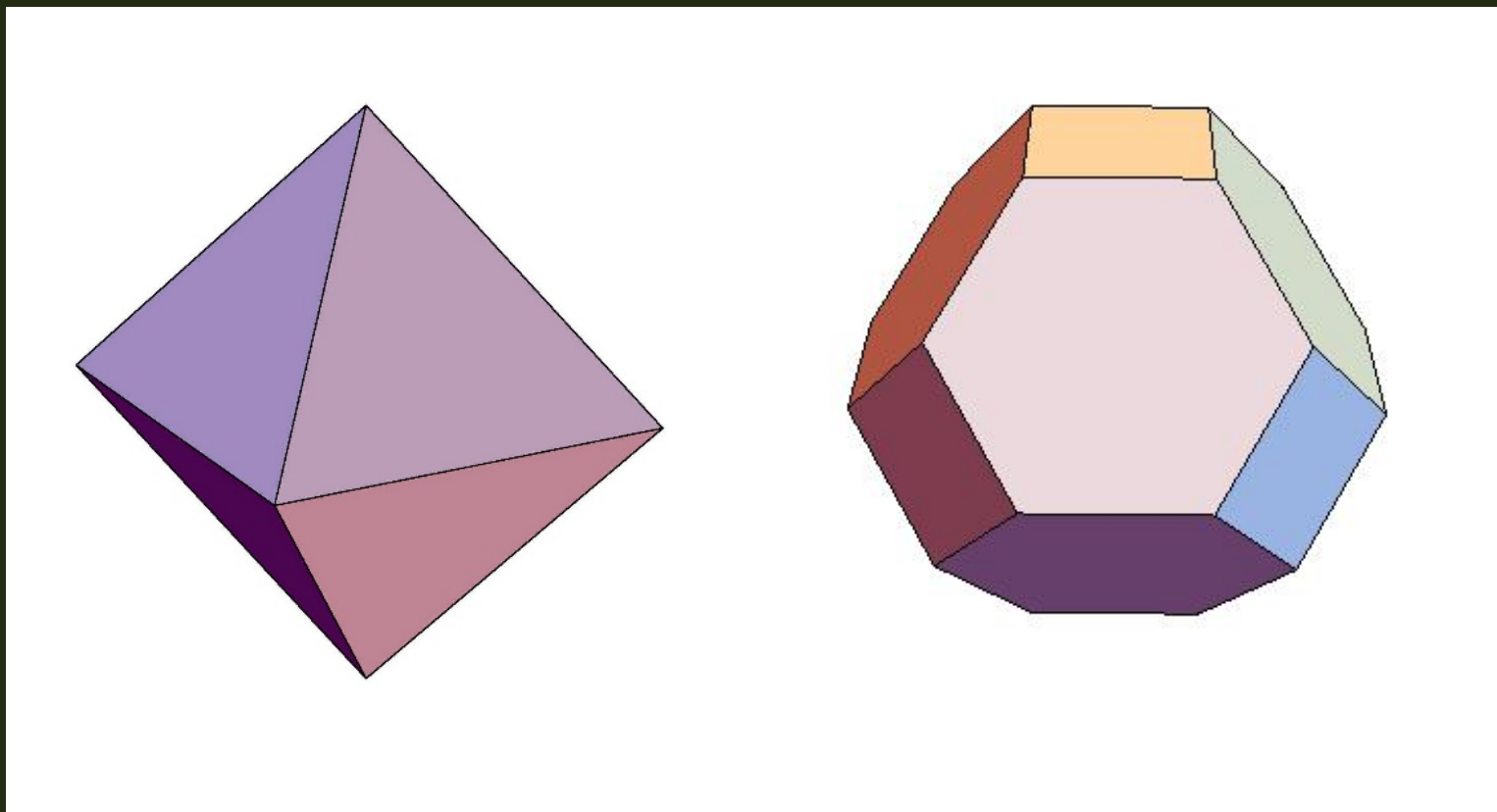


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

ここでいう切頂八面体は、正八面体の辺を3等分する点を結んで頂点の周りにできる四角錐を取り除いたものです。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- 独立な3つのベクトルで生成される格子の対称性については、2次元の格子に対する考え方がそのまま通用する。
- 対称性を表す行列は、3次直交行列であるが、生成する3つのベクトルを基底とする行列表示では、整数係数の行列である。

3次の直交行列は、ある座標で
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$
 と書かれることがわかっている。

この直交行列のトレースは、 $2 \cos \theta \pm 1$ で、これが整数だから、 $2 \cos \theta$ は、 $-2, -1, 0, 1, 2$ のどれかの値をとる。

従って、 θ は、 $\pi, \pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{1}{3}\pi, 0$ のいずれかになる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- これにより図形に「ストイケイア」がしばしば登場することになる。
- 平面のときに考えた等方部分群を考えると、これについてはもっと詳しく調べることができる。

$x \in R^3$ に対し、等方部分群 (isotropy subgroup)
 $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ を考える。

ユークリッド空間の G_x の作用による軌道空間を考える。
 G_x は、 x を中心とする半径 1 の球面 S^2 に作用する。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

2. 2次元球面的オービフォールド

軌道空間 S^2/G_x は、2次元オービフォールドとなるが、もともと球面から得られたものであるから、各点の近傍が、球面の一部、半球面の一部、 n を自然数として角度 $\frac{2\pi}{n}$ の球面的錐、 n を自然数として角度 $\frac{\pi}{n}$ の球面的扇型からなるものである。

- 軌道空間のオイラー数は、球面のオイラー数 2 を整数で割ったものになる。
- 2次元平坦オービフォールドに対し、オイラー数を定義したが、その定義においては、錐や扇型の頂角が定義されていれば、十分であった。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【演習】 2次元平坦オービフォールドで考えたときと同様に辺を持たない2次元球面的オービフォールドを分類せよ。

【解答例】 2次元球面的オービフォールド $S(n_1, \dots, n_k)$ に対しては、適当に分岐被覆をとると2次元球面になり、ある正整数 m に対し、 $\chi(S(n_1, \dots, n_k)) = \frac{2}{m}$ を満たさなければならない。

そこで

$$\chi(S) - k + \left(\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} \right) = \frac{2}{m}$$

となる $S(n_1, \dots, n_k)$, m を探す。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

条件から、

$$\chi(S) = \frac{2}{m} + \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) = 1 \text{ または } 2$$

である。

このとき $\chi(S) = 1$ ならば、 $m = 2$, $k = 0$, または、 $m = 2\ell$, $k = 1$, $n_1 = \ell$ (ℓ は 2 以上の整数) となる。それぞれ RP^2 , $RP^2(\ell)$ となる。

$\chi(S) = 2$ ならば、 $k \leq 3$ である。

$k = 0$ のとき、オービフォールドは S^2 である。

$k = 1$ のものは存在しない。

$k = 2$ のとき、 $m = \ell$, $n_1 = n_2 = \ell$ (ℓ は 2 以上の正整数) であり、オービフォールドは $S^2(\ell, \ell)$ である。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

$k = 3$ のとき、

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{m}$$

で、 $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ として、 (n_1, n_2, n_3, m) は $(2, 2, \ell, 2\ell)$ (ℓ は正整数), $(2, 3, 3, 12)$, $(2, 3, 4, 24)$, $(2, 3, 5, 60)$ となる。

このときオービフォールドは、 $S^2(2, 2, \ell)$, $S^2(2, 3, 3)$, $S^2(2, 3, 4)$, $S^2(2, 3, 5)$ と書かれる。

演習の解答は、 ℓ を 2 以上の整数として、 RP^2 , $RP^2(\ell)$, $S^2(\ell, \ell)$, $S^2(2, 2, \ell)$, $S^2(2, 3, 3)$, $S^2(2, 3, 4)$, $S^2(2, 3, 5)$ である。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

等方部分群 G_x は、
 RP^2 のとき中心対称の群、
 $RP^2(\ell)$ のとき、 z 軸の周りの $\frac{2\pi}{\ell}$ 回転と、 xy 平面についての
対称移動と z 軸の周りの $\frac{\pi}{\ell}$ 回転の合成で生成される群である。

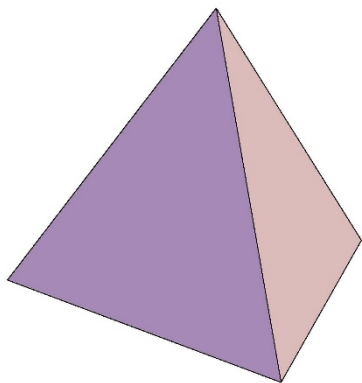
$S^2(\ell, \ell)$ のときは、 $\frac{2\pi}{\ell}$ 回転で生成される巡回群 C_ℓ 、
 $S^2(2, 2, \ell)$ のとき、正 ℓ 角形の等長変換群 $D_{2\ell}$ 、
 $S^2(2, 3, 3)$ のとき正四面体の向きを保つ等長変換群、
 $S^2(2, 3, 4)$ のとき、立方体、正八面体の向きを保つ等長変換群、
 $S^2(2, 3, 5)$ のとき、正十二面体、正二十面体の向きを保つ等長
変換群となる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

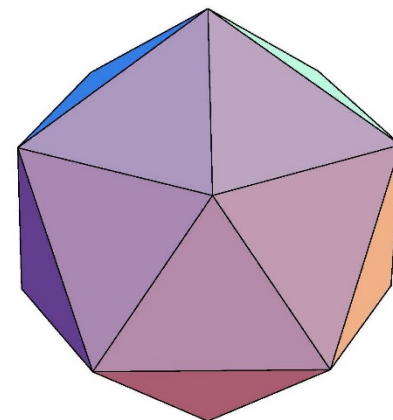
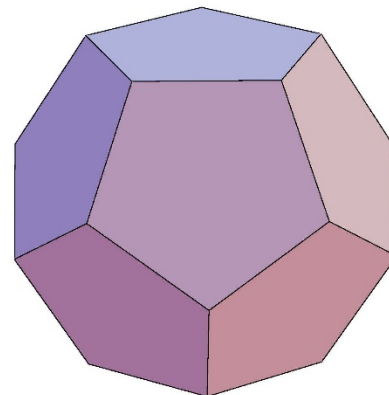
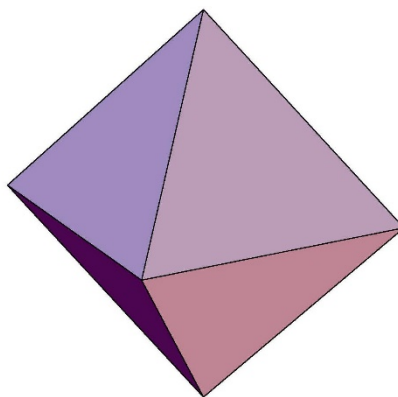
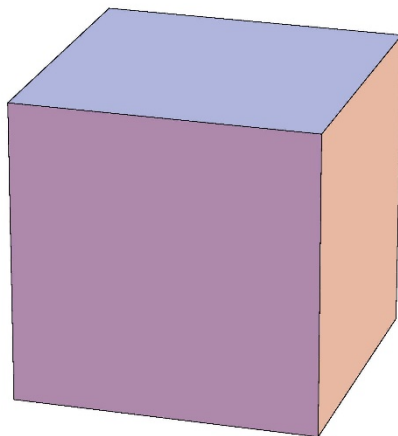


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



2次元球面的オービ
フォールドの分類は、
正多面体の分類を含
むものであった。

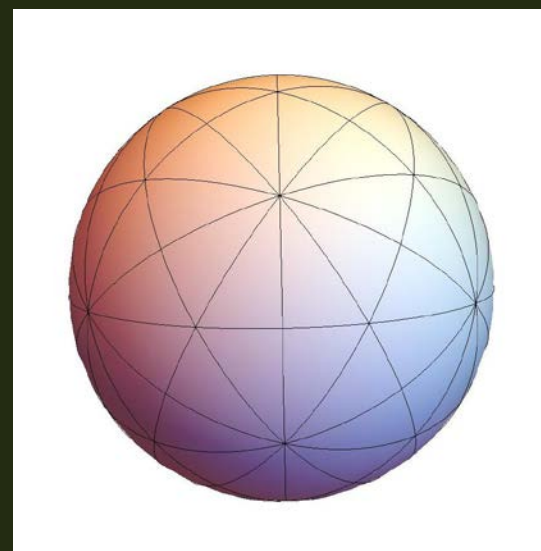
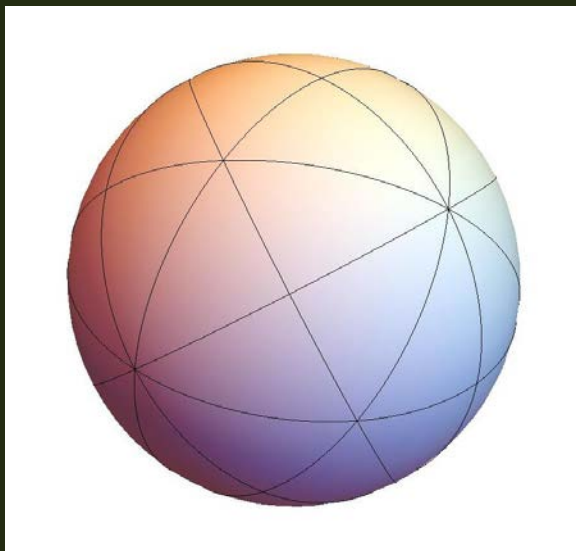
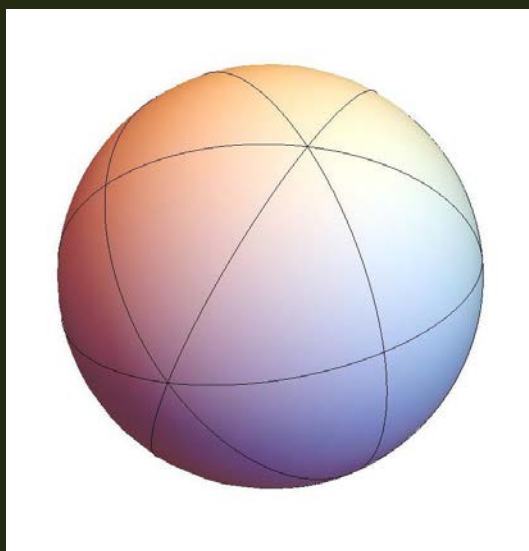
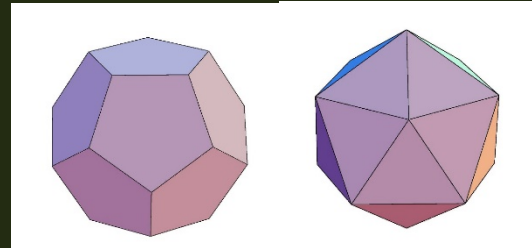
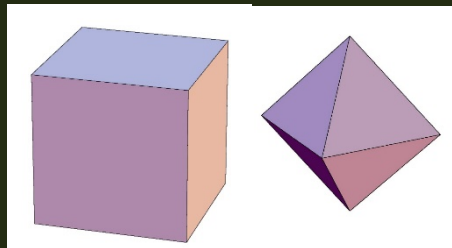
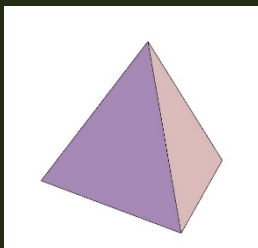
立方体と正八面体、正
十二面体と正二十面
体の等長変換群は同
型である。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



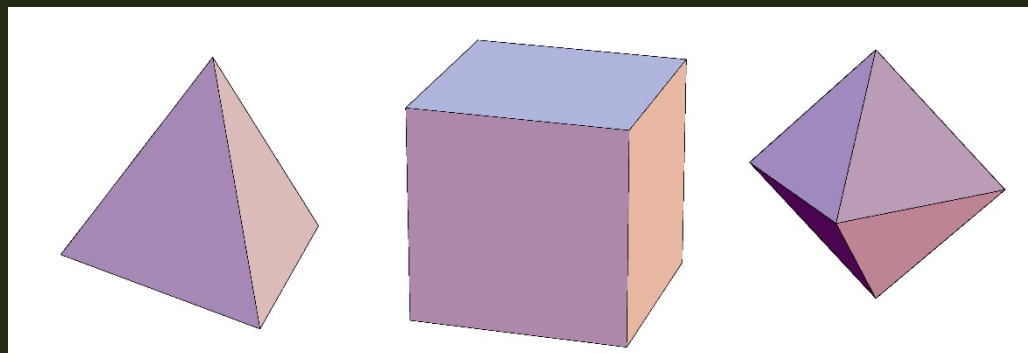
東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



しかし、3次元空間の周期性と対称性を持つ図形に対しては、その対称性を与える回転の角度に制限があった。従って、正十二面体正二十面体の等長変換群は現れない。

正多面体の群の作用については、Jeff Weeks氏のソフトウェア「万華鏡タイル」(KaleidoTile)が公開されています。

<http://www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html>

ソフトウェア GeoGebra <http://www.geogebra.org/> が3次元グラフィックスをサポートしており、いろいろと実験できます。

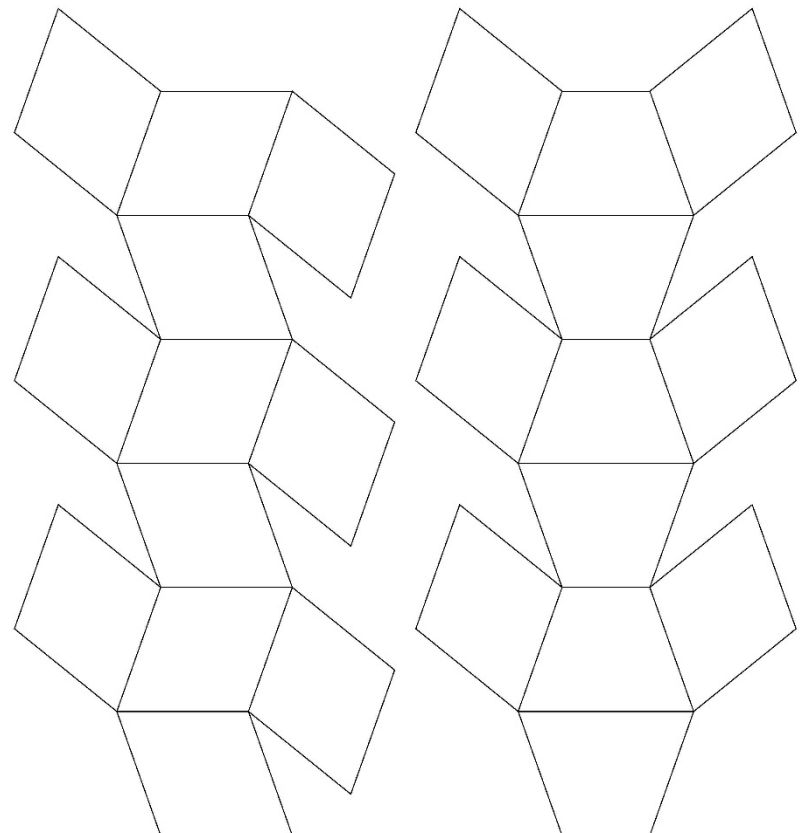
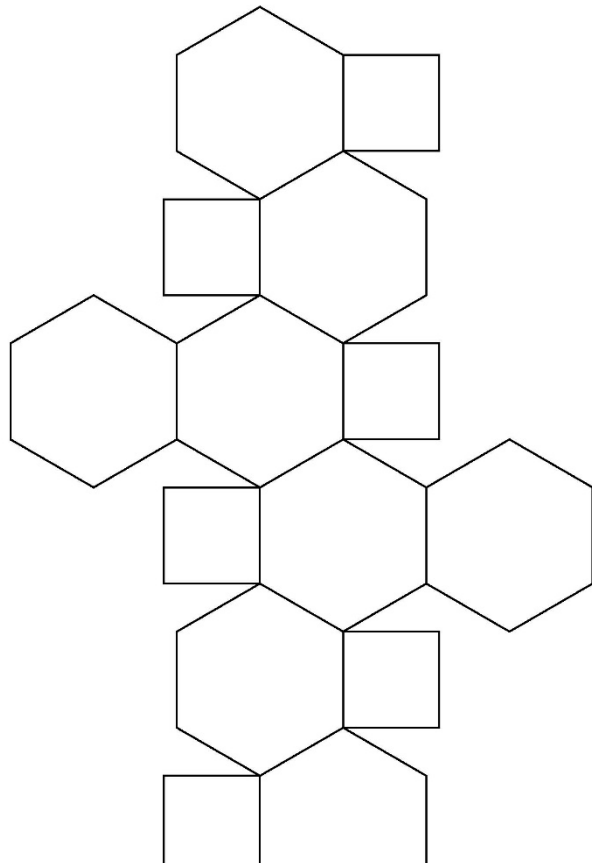


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

3. 3次元の対称性の高い格子

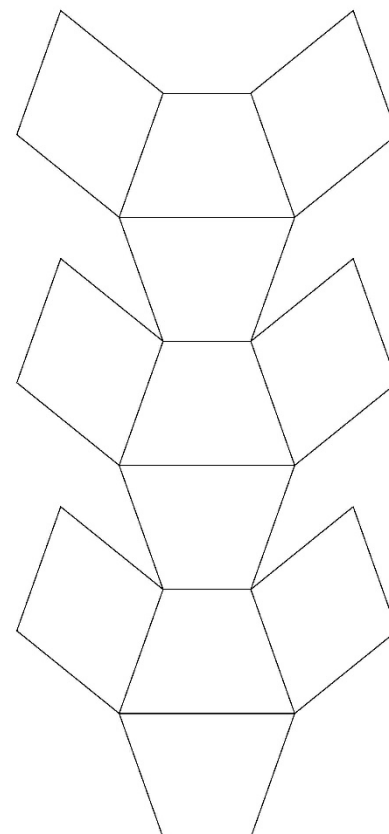
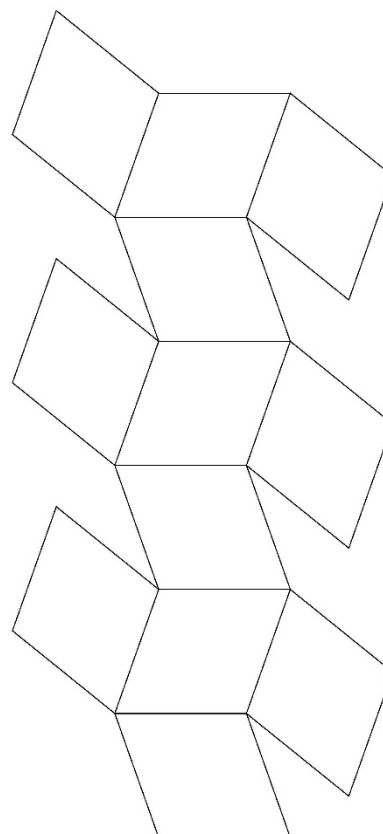
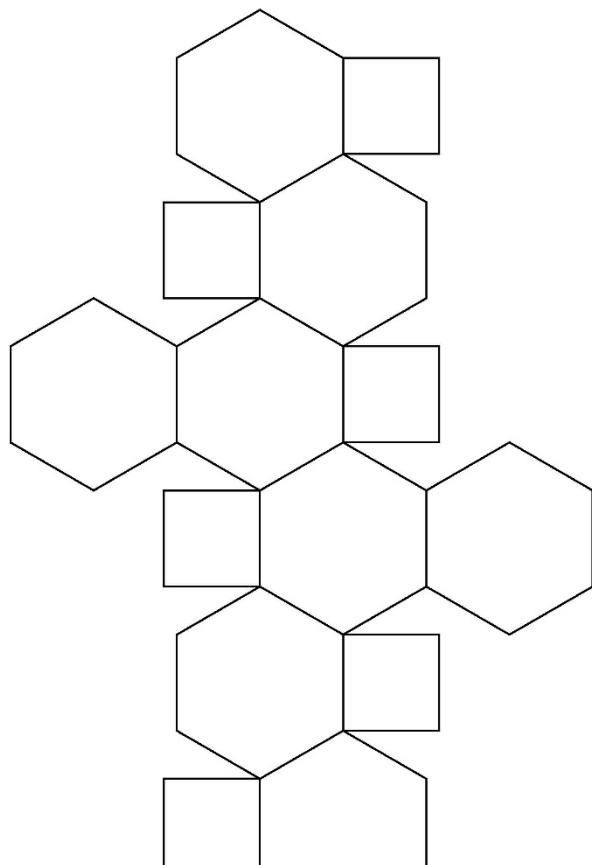


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【演習】 次の展開図を組み立てて得られる立体を考えてください。

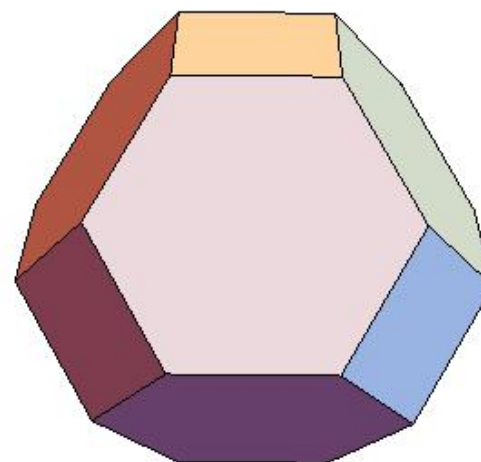
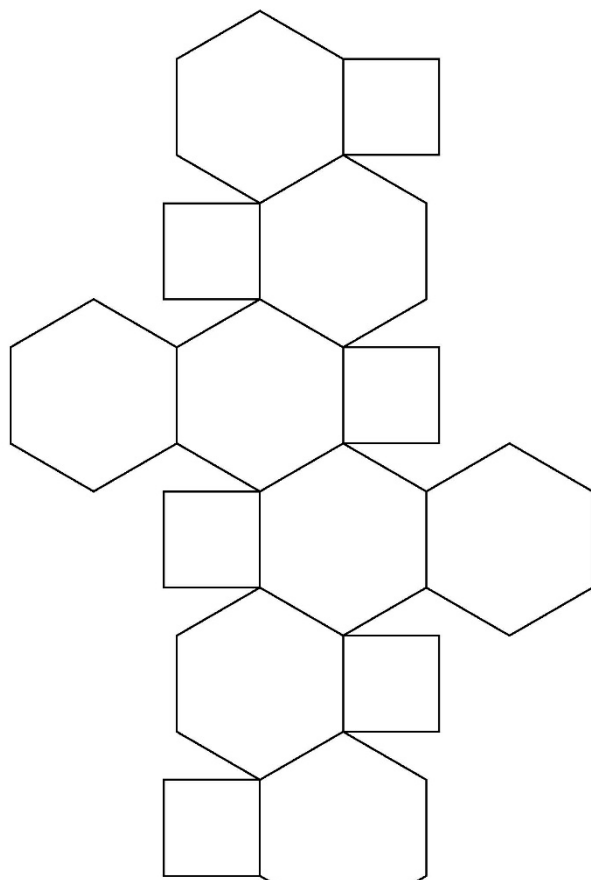


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

これで組み立てられる立体は切頂8面体と呼ばれます。

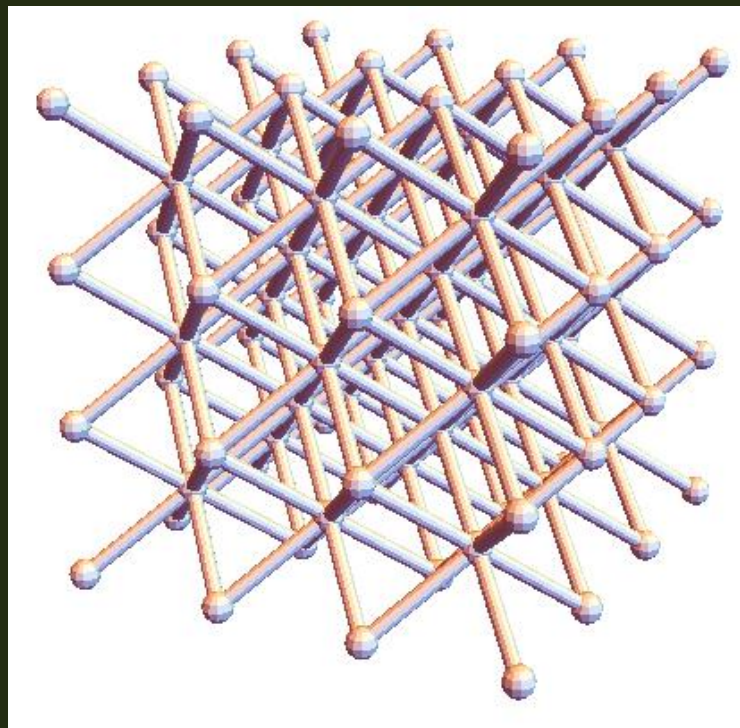
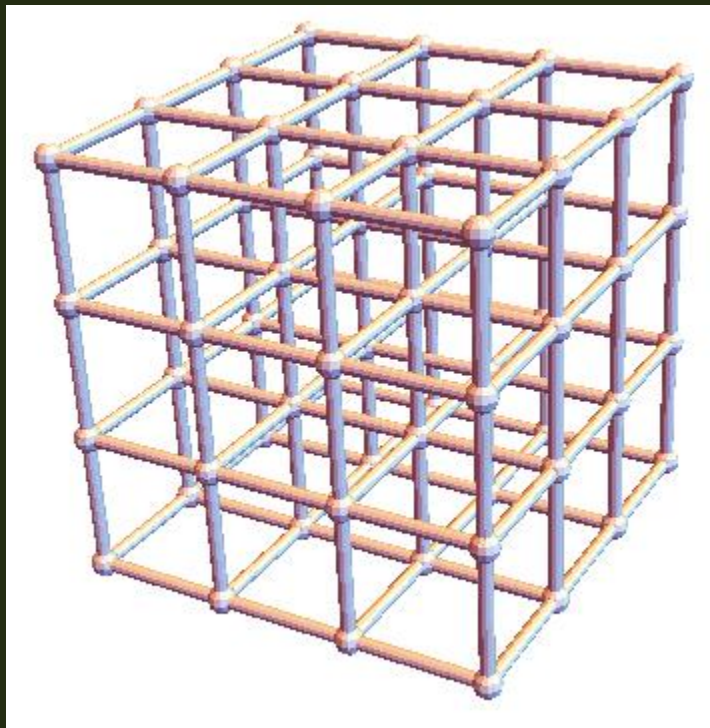


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

切頂8面体は、体心立方格子と呼ばれるものの、ディリクレ領域となります。

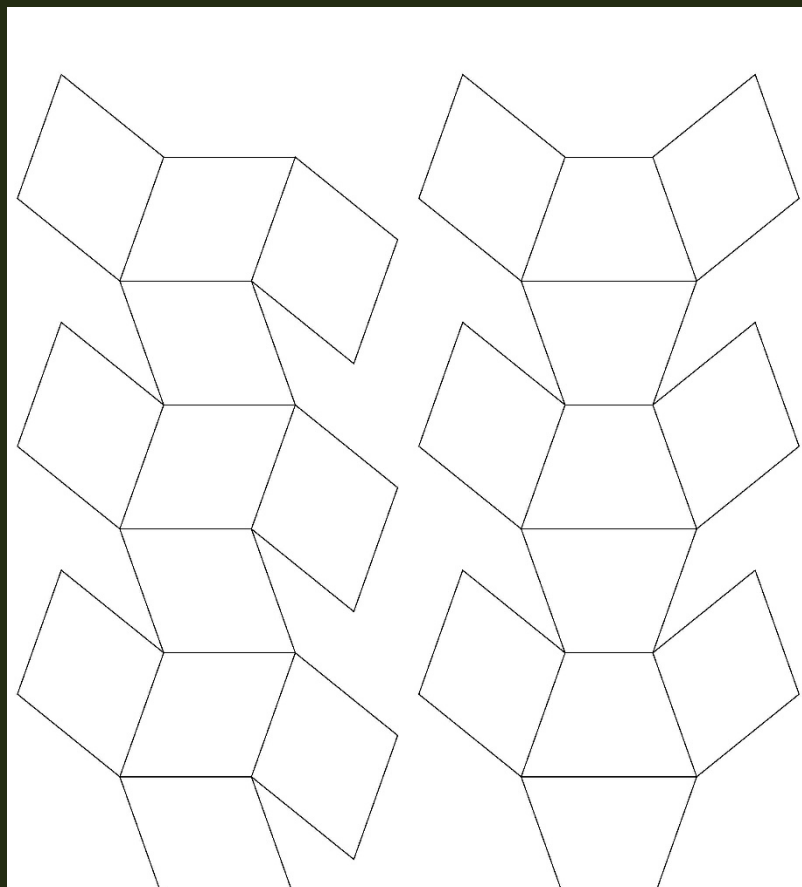


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

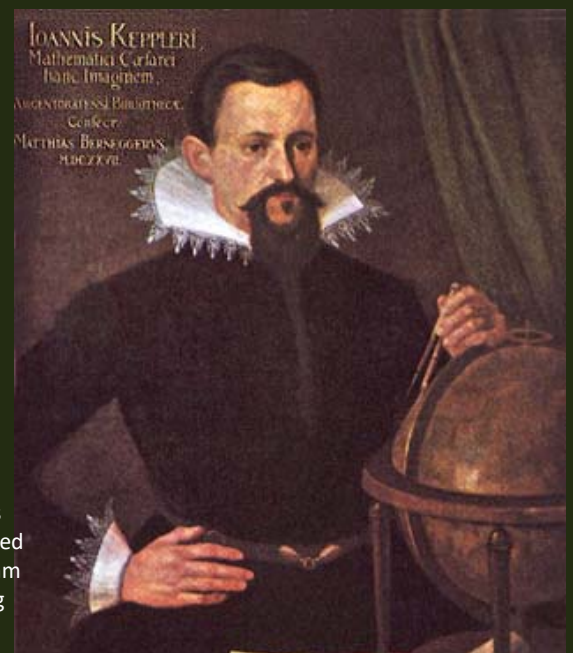


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

この展開図から組み立てられる図形は、最密充填問題と関係があります。



最密充填問題(ケプラーの問題):
同じ大きさの球体を3次元ユークリッド空間に重なりを持たないように詰め込むとき、その密度は、
 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ となる。



Wikimedia Commons
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/de/JKepler.png>
(ref. 2017/5/18)



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

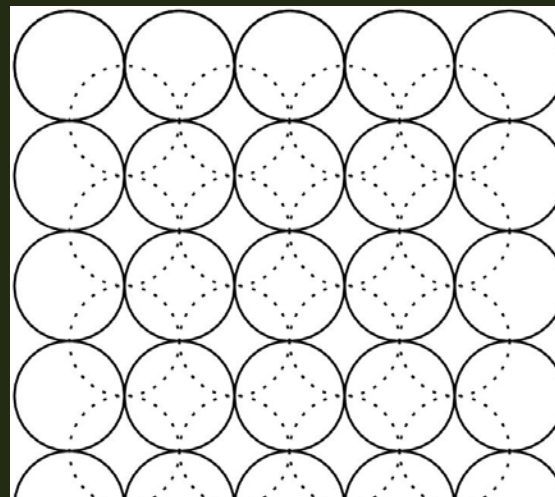
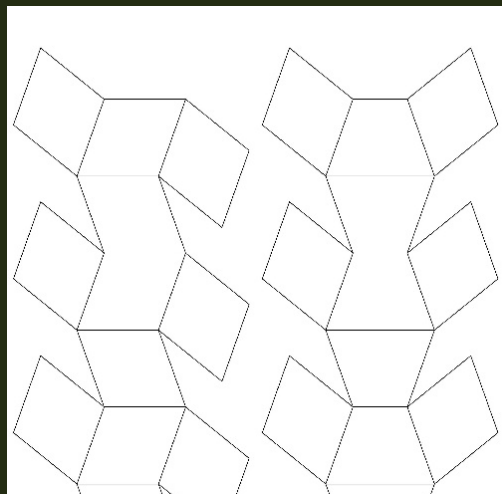


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

ビー玉が配れないので思考実験をしてください。

【仮想ビー玉の演習1】 次のようにビー玉を充填する。
第1層に正方形の格子を作るように並べ(図の実線)、
第2層に第1層の正方形の中心をなす格子を作るように並べる(図の点線)。
第3層は第1層と同じように並べる。

- このように充填していったときに、1個のビー玉には、いくつのビー玉が接しているか調べよ。
- 1個のビー玉に接しているビー玉の位置関係を表現してみよ。



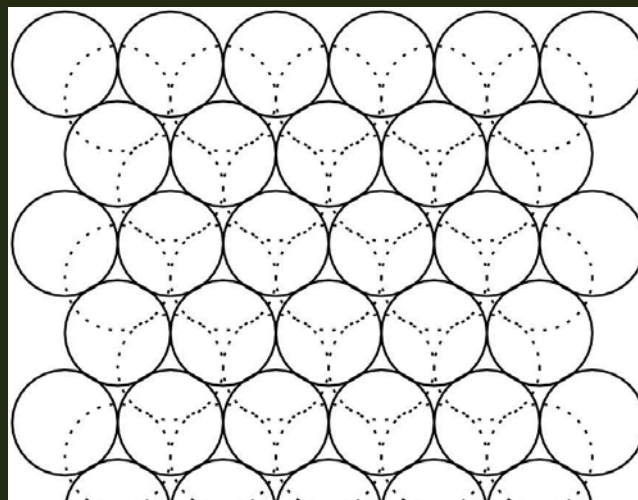
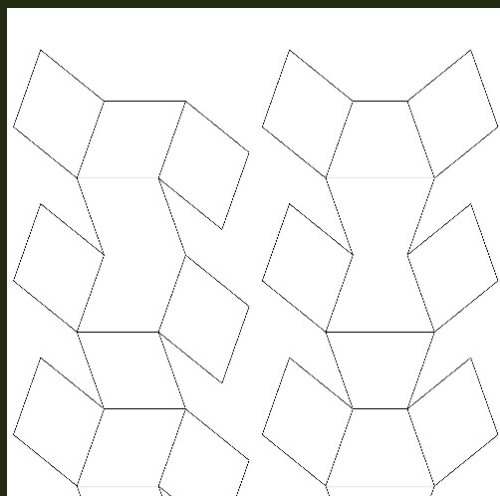
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【仮想ビー玉の演習2】 次のようにビー玉を充填する。
第1層に正三角形の格子を作るように並べ(図の実線)、
第2層に第1層の1つの正三角形の中心を含む格子を作るように並べる(図の点線)。

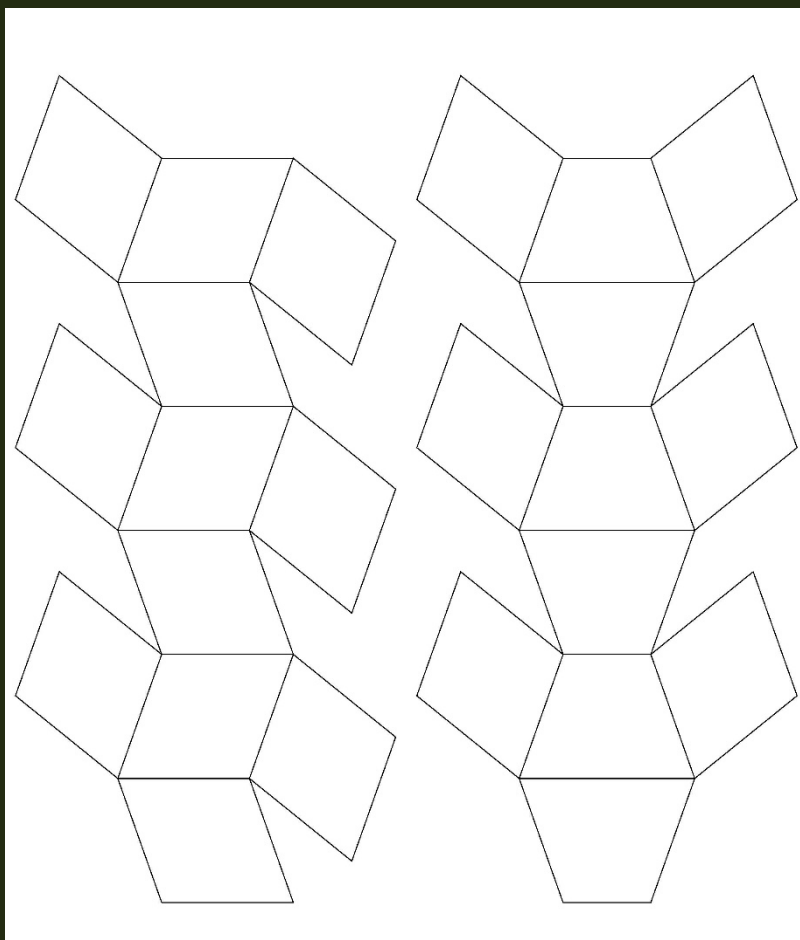
- 第3層の並べ方に2通りあることを観察せよ。
- このように充填していったときに、1個のビー玉には、いくつのビー玉が接しているか調べよ。
- 1個のビー玉に接しているビー玉の位置関係を表現してみよ。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



- 左の展開図から組み立てられる図形は、菱形12面体と呼ばれ、正方形に並べた充填と、正三角形に並べた充填の一方のボロノイ領域です。
- 右の展開図は、正三角形に並べた充填の他方のボロノイ領域です。

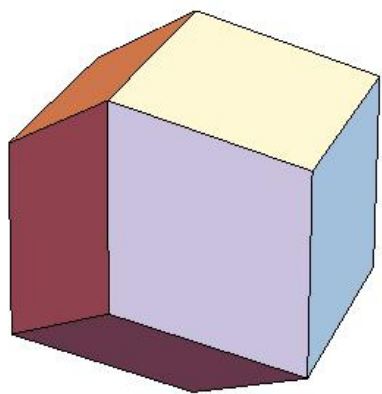


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

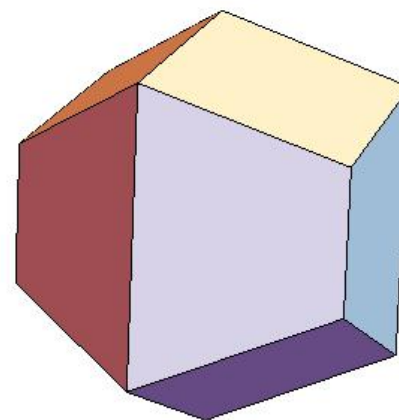


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- 左の展開図から組み立てられる菱形12面体。



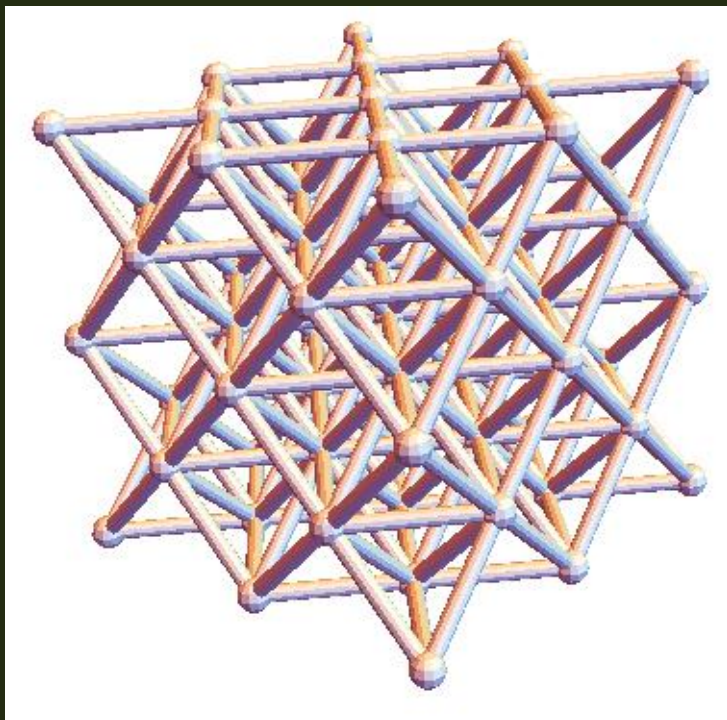
- 右の展開図から組み立てられた立体。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



菱形12面体は、面心立方格子の
ディリクレ領域になっています。

以上が、平行移動で生成される群
のディリクレ領域の概要です。

もう一方の領域は、六方最密格子
のボロノイ領域となっています。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

このようなディリクレ領域で
対称性が特に高いのは、
立方体、切頂8面体、
菱形12面体です。
もう1つ挙げるとすると
正六角形を底面とする
六角柱です。



By Unknown From Wikimedia Commons
(ref. 2016/7/5)

それを実感するソフトウェア「Curved Spaces」をJeff Weeks氏
が作成して公開しています。

<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html>



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

4. 対称性の高い周期的図形

立方格子、体心立方格子、面心立方格子のような、3重周期的なグラフ(頂点と長さ1の線分でできた図形)がユークリッド空間に埋め込まれている図形を考えます。これを以下では格子と呼びます。

このような図形の対称性を考えることができます。

最も対称性が高いと思われる場合は次のものです。

- 任意の頂点の周りで、任意の2つの辺を他の辺を固定したまま入れ替える合同変換があり、
- 任意の辺をそれ自身に逆向きに写す合同変換がある。

このような格子は、砂田利一により研究され、ダイヤモンド格子以外にK4格子と呼ぶ格子があることが示されました。

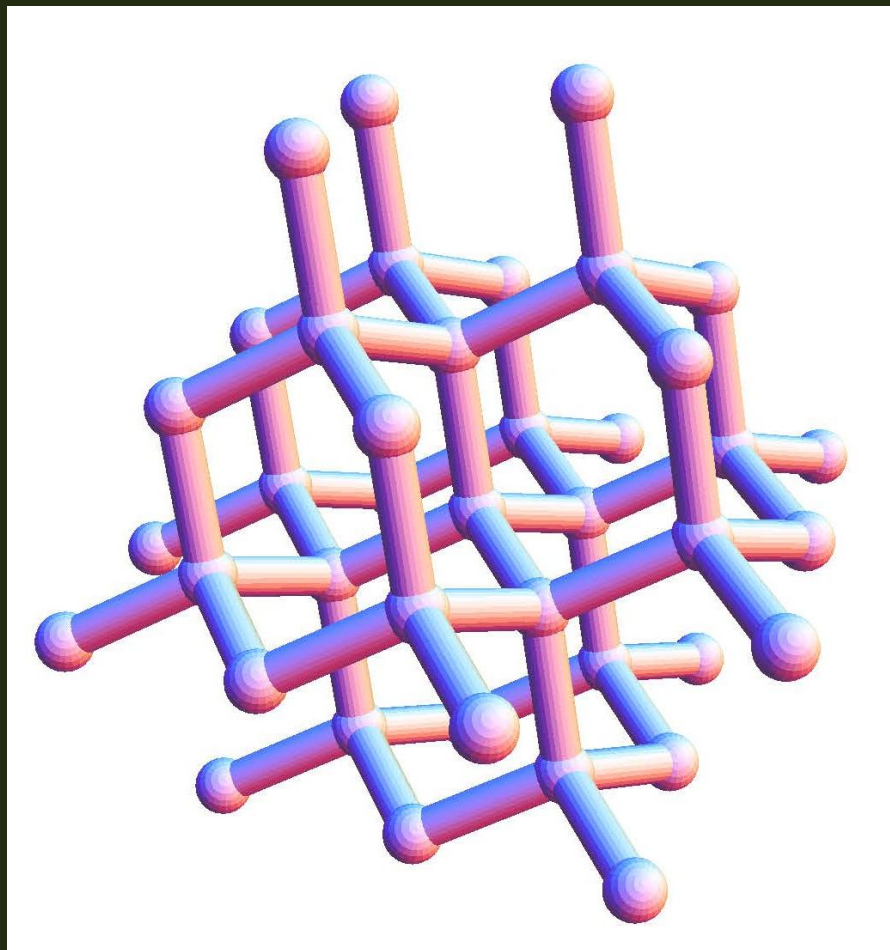
Toshikazu Sunada, 「Crystals that nature might miss creating」, Notices of the AMS, Volume 55, Number 2, (2008) 208-215.



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



ダイヤモンド格子は図のもの
です。

正四面体の重心と頂点を
結ぶ図形を考え、それを正
四面体の頂点を頂点に移
す平行移動で移していった
形をしています。

もともと四面体の頂点と考
えたところもったところでの
周りの頂点との関係も四
面体の重心と同じになって
いることがわかります。



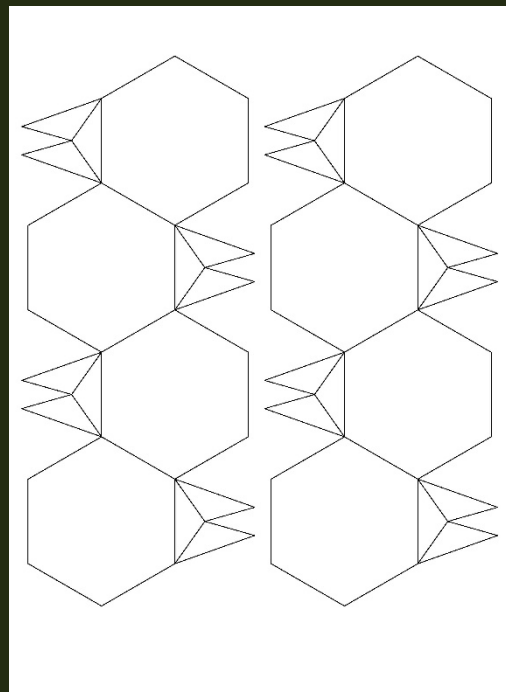
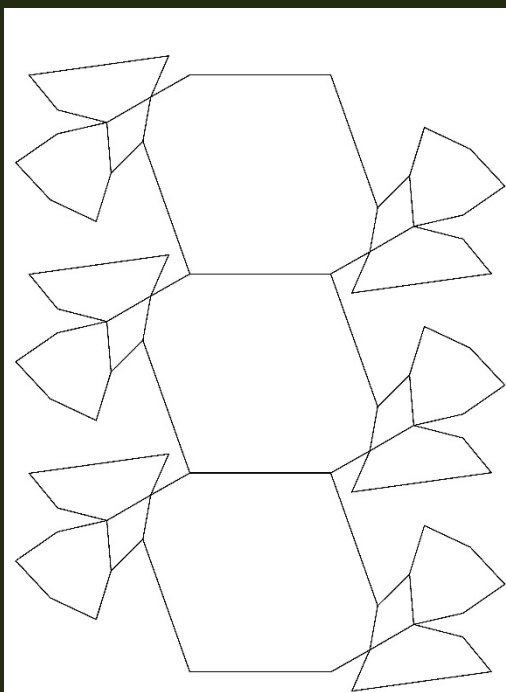
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【演習】配布した展開図に糊代をつけて立体にしてみてください。
セロテープで貼り付けても良いです。
その立体を用いてどのように空間が埋め尽くされるかを、
周りの何人かで、立体を持ち寄って検証してください。

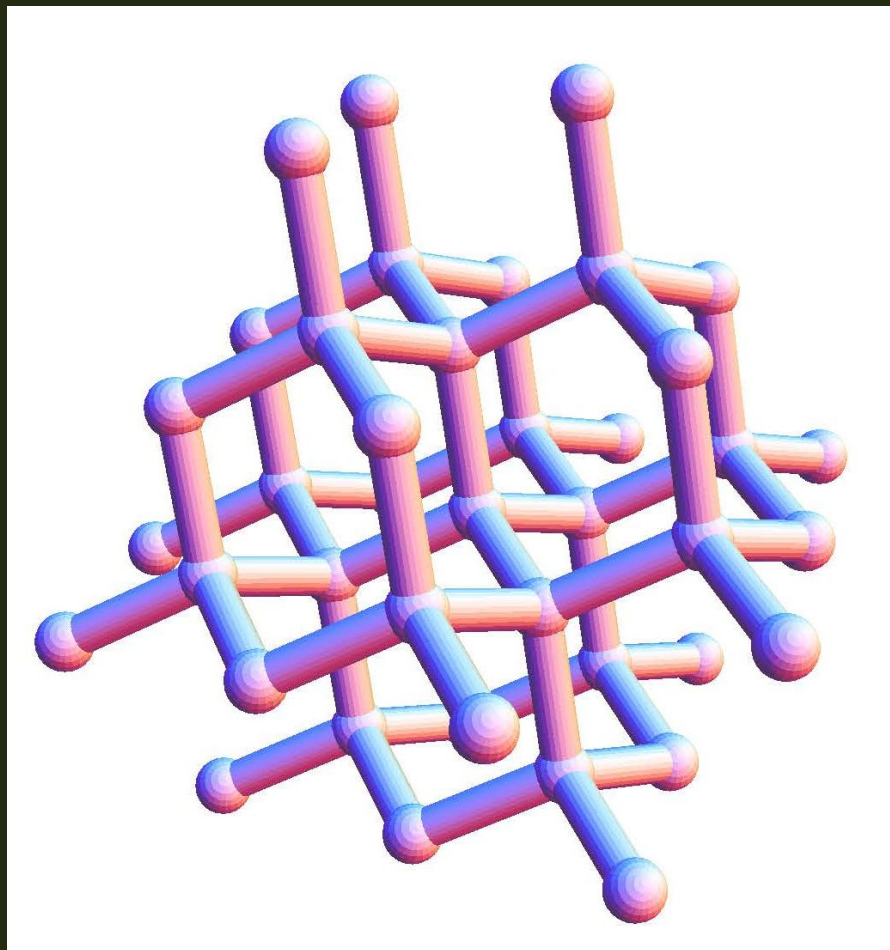
左の展開図では、
左右に3つずつ
ある六角形のうち
1つずつだけを用いる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



ダイヤモンド格子は図のものです。

正四面体の重心と頂点を結ぶ図形を考え、それを正四面体の頂点を頂点に移す平行移動で移していった形をしています。

もともと四面体の頂点と考えたところもったところでの周りの頂点との関係も四面体の重心と同じになっていることがわかります。



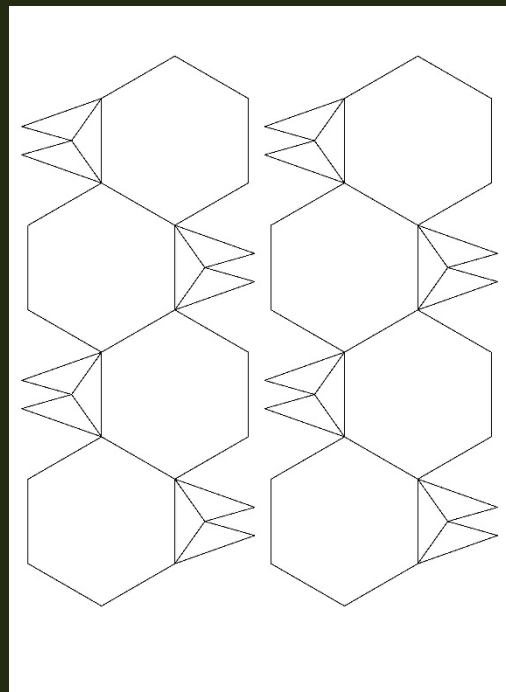
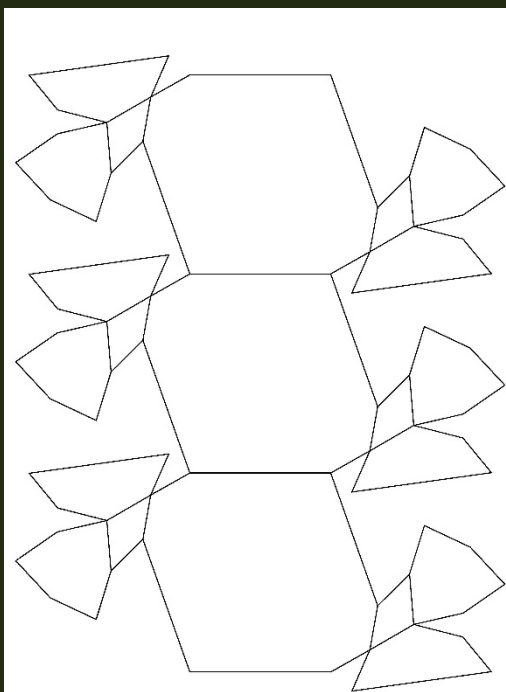
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【演習】 配布した展開図に糊代をつけて立体にしてみてください。
セロテープで貼り付けても良いです。
その立体を用いてどのように空間が埋め尽くされるかを、
周りの何人かで、立体を持ち寄って検証してください。

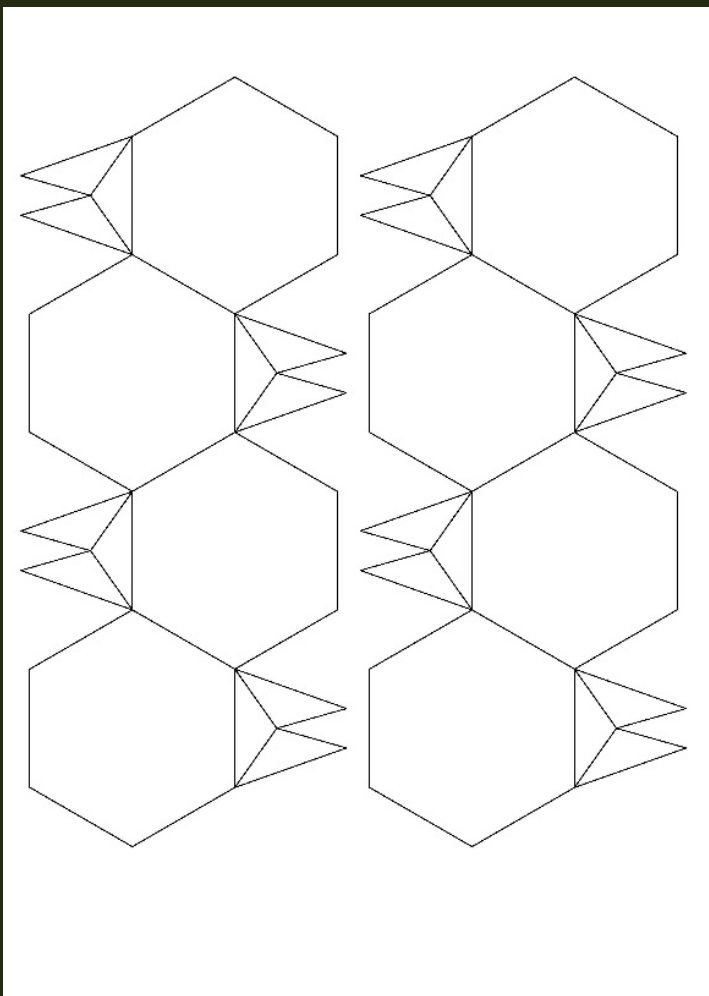
左の展開図では、
左右に3つずつ
ある六角形のうち
1つずつだけを用いる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



左の展開図がダイヤモンド格子のボロノイ領域を表していることが確認できたでしょうか？

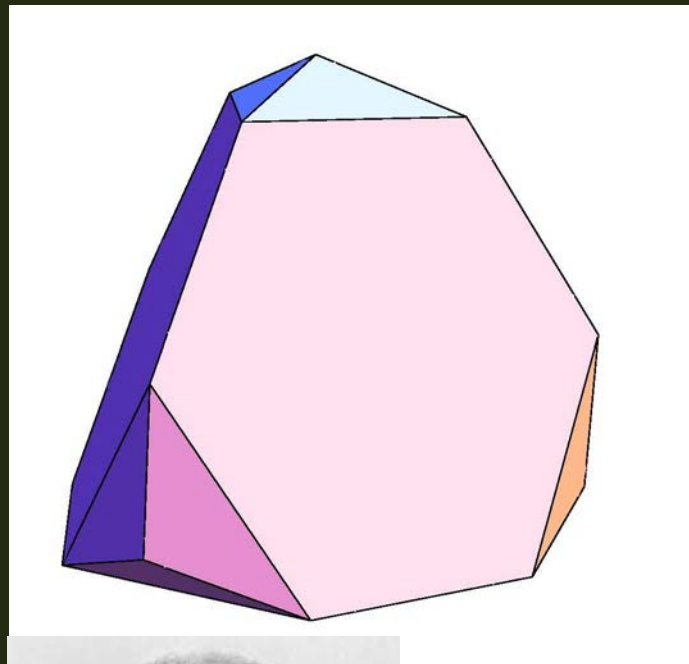
各頂点の等方部分群は $T(2, 3, 3)$ に対応するものになります。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



ダイヤモンド格子のボロノイ領域は、正四面体の頂点において3分の1に縮小した正四面体を切り取り、その一つを重心で分割したものの貼り付けた形をしています。



Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georgy_Voronoy.jpg
(ref. 2017/5/18)

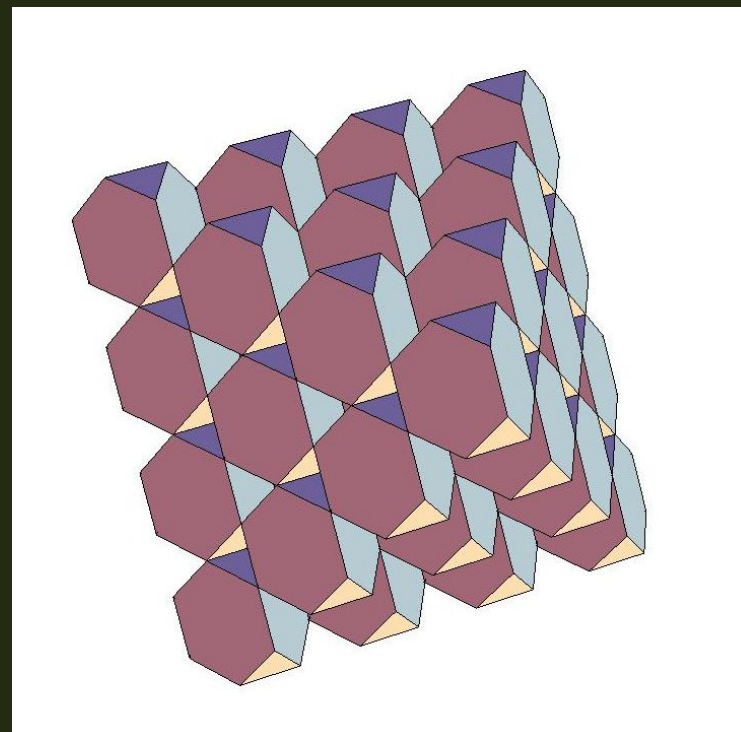
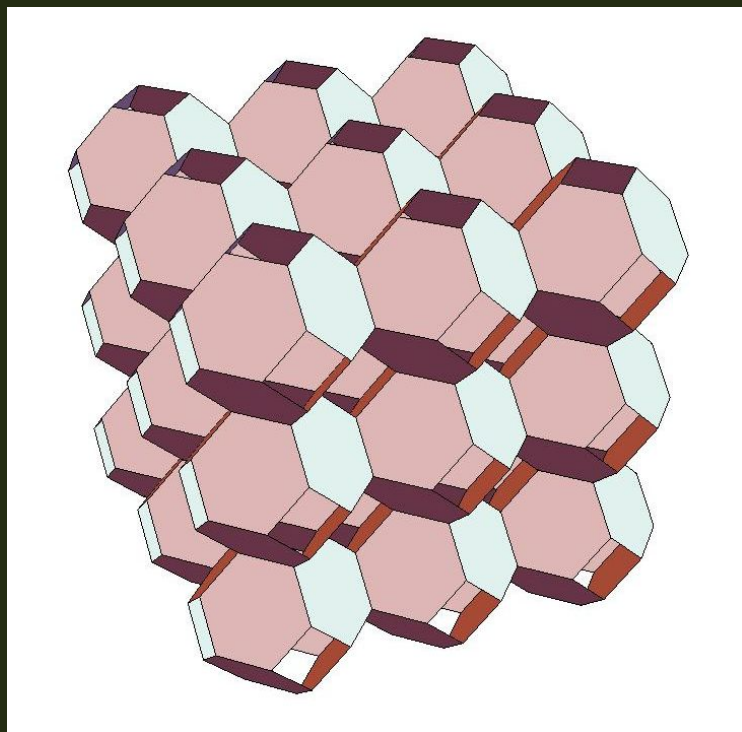
どのように空間が埋め
尽くされるか納得できたか？



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



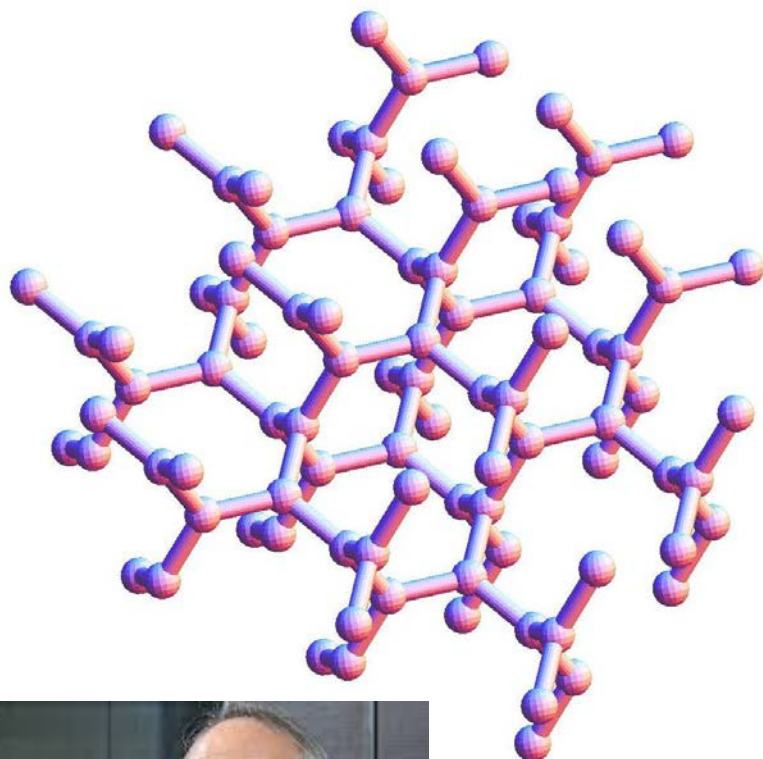
面心立方格子のディリクレ領域、ダイヤモンド格子のボロノイ領域の境界の六角形の部分をあつめると空間内に無限個の穴を持ち周期的に広がっている曲面が得られる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



砂田利一氏のK4格子は図のものです。

各頂点は正三角形の重心と頂点を結ぶ形になっています。辺の両端の周りの正三角形の間の面角 θ は $\cos \theta = \frac{1}{3}$ を満たします。

K4は、4頂点の完全グラフと呼ばれているもので、K4格子自体は、K4の「普遍アーベル被覆」になっています。



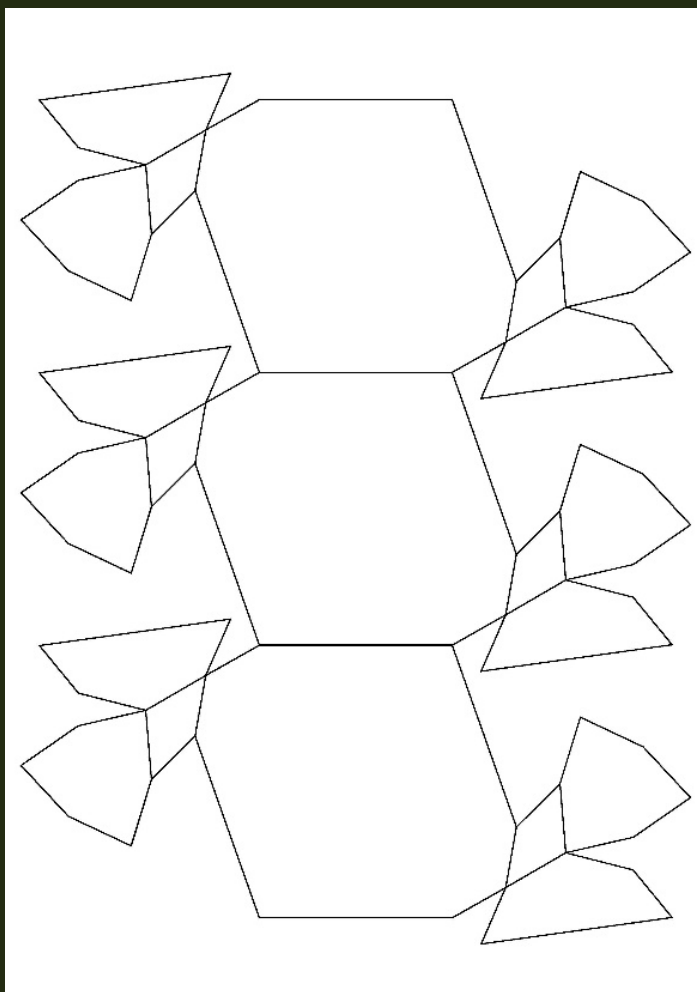
© Meiji University, All rights reserved



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



左の展開図が砂田利一氏のK4格子のボロノイ領域を表しています。

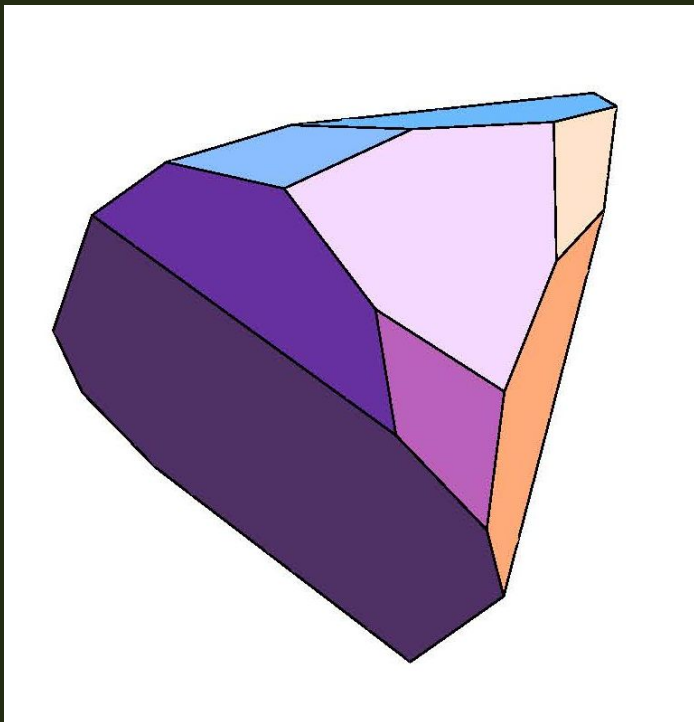
各頂点の等方部分群は D_6 に対応するものになります。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



左の砂田利一氏のK4格子のボロノイ領域は、正三角柱を削ったような形をした17面体です。

このボロノイ領域は、鏡像とは、向きを保つ等長写像では移りあいません。

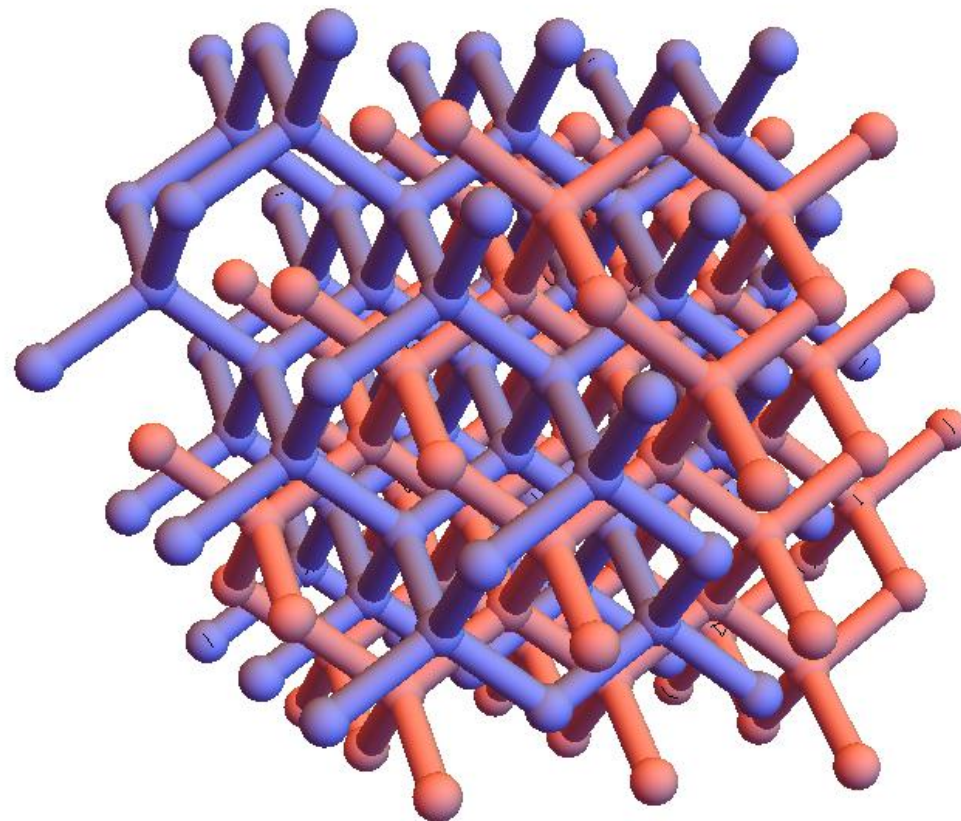
どのように空間が埋め尽くされるか納得できましたか？



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



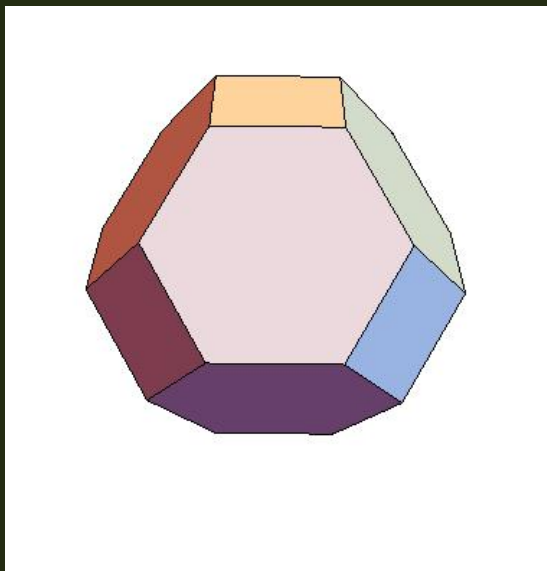
ダイヤモンド
格子をある点
について対称
に移動すると、
もとのタイヤ
モンド格子の
補空間にダイ
ヤモンド格子
が入り込んだ
ダブルダイヤ
モンド格子を
得ます。



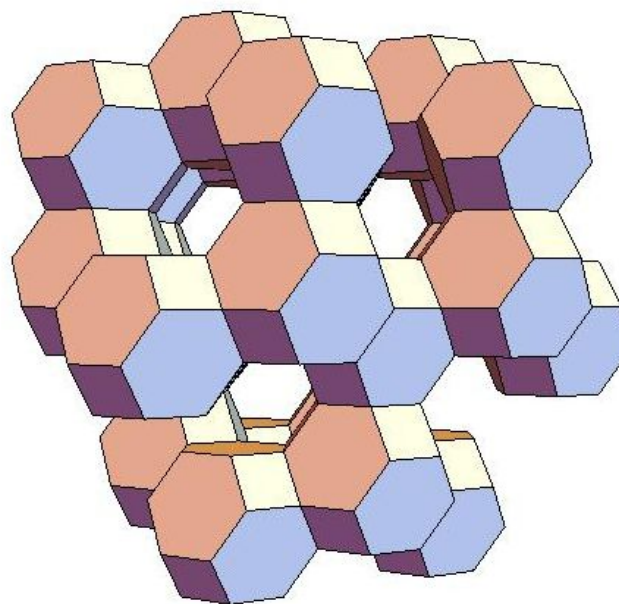
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



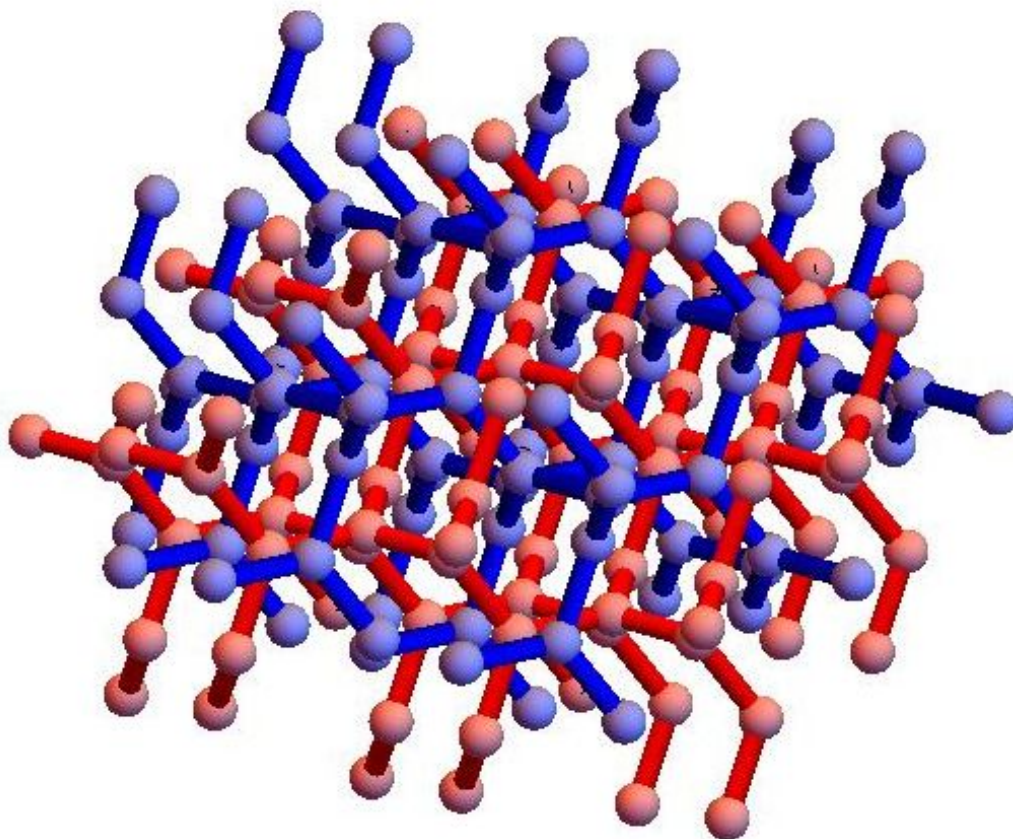
この2つの格子を合わせたもののボロノイ領域は、切頂八面体になります。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



K4格子をある点について対称に移動すると、もとのK4格子の補空間に鏡像のK4格子が入り込んだダブルK4格子を得ます。

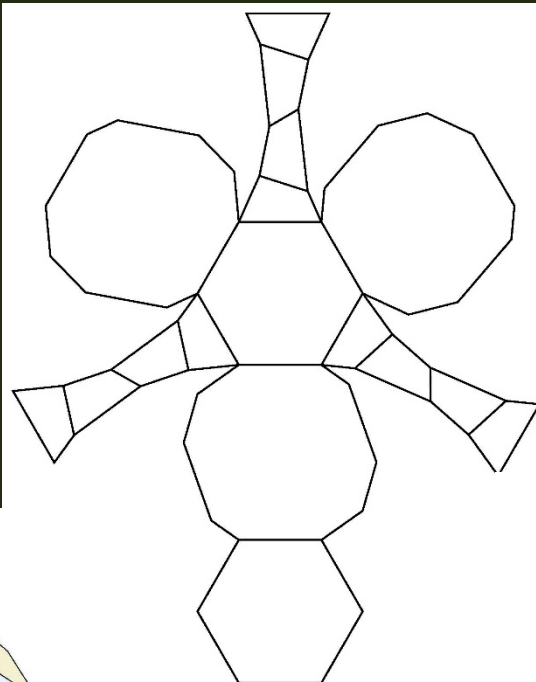


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

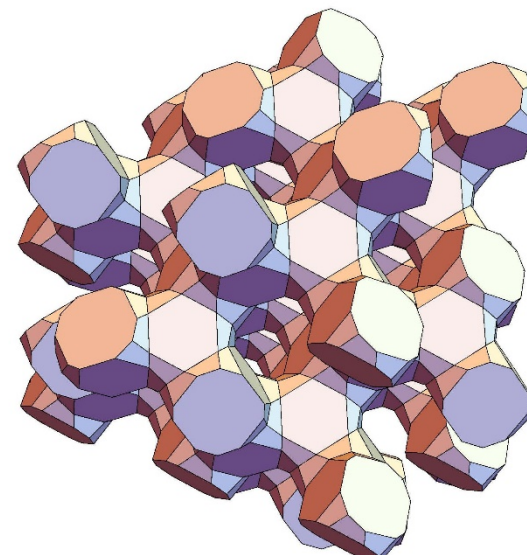
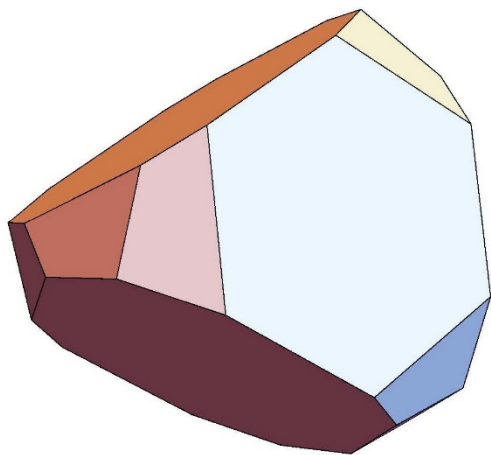


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

この2つの格子
を合わせたもの
のボロノイ領域
は、図のような
多面体になります。



これ以外に立方格子も
点対称により、ダブル格
子をなしますが、他にあ
るのかどうか知りたいと
ころです。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

ウェブでも見られる参考文献

砂田利一 『ダイヤモンドはなぜ美しい?』への付録

https://pub.maruzen.co.jp/book_magazine/support/diamond_web/diamond_web.pdf

内藤久資 「幾何学の応用を考えるー結晶構造と離散幾何学ー」

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~naito/lecture/2015_10_HCD/final.pdf

宮岡礼子 「調和写像とダイヤモンド格子ーその美しさの秘密ー」

<http://www.nara-wu.ac.jp/initiative-MPI/images/H20/Miyaoka/Miyaoka-file.pdf>

松本 圭司著「格子めぐり」 数学通信9巻4号(2004年度秋に北海道大学で開催された市民講演会の講演)

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/904/matsumoto.pdf>

Dimensionsのページ http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_JP.htm



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO