

クレジット:

UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 坪井 俊

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。

学術俯瞰講義「図形から広がる数理科学」

周期性と対称性

対称性を見つける・周期性を見つける

2016年5月19日
東京大学大学院数理科学研究科
坪井 俊



東京大学大学院数理科学研究科

Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学

THE UNIVERSITY OF TOKYO



岐阜市歴史博物館蔵「関ヶ原合戦屏風」(from Wikimedia Commons)



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

合戦の場面では、家紋の幟により、素性を示した
図形を見ると、同じであることが判断できる



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学 大学院総合文化研究科・教養学部

The University of Tokyo, Komaba

Graduate School of Arts and Sciences, College of Arts and Sciences

画像提供: 東京大学大学院総合文化研究科・教養学部



中央の柏葉は
1935年に駒場に
移ってきた
第一高等学校の校章



画像: 第一高等学校ホームページより (<http://museum.c.u-tokyo.ac.jp/ICHIKOH/history04.html>)
提供: 東京大学駒場博物館

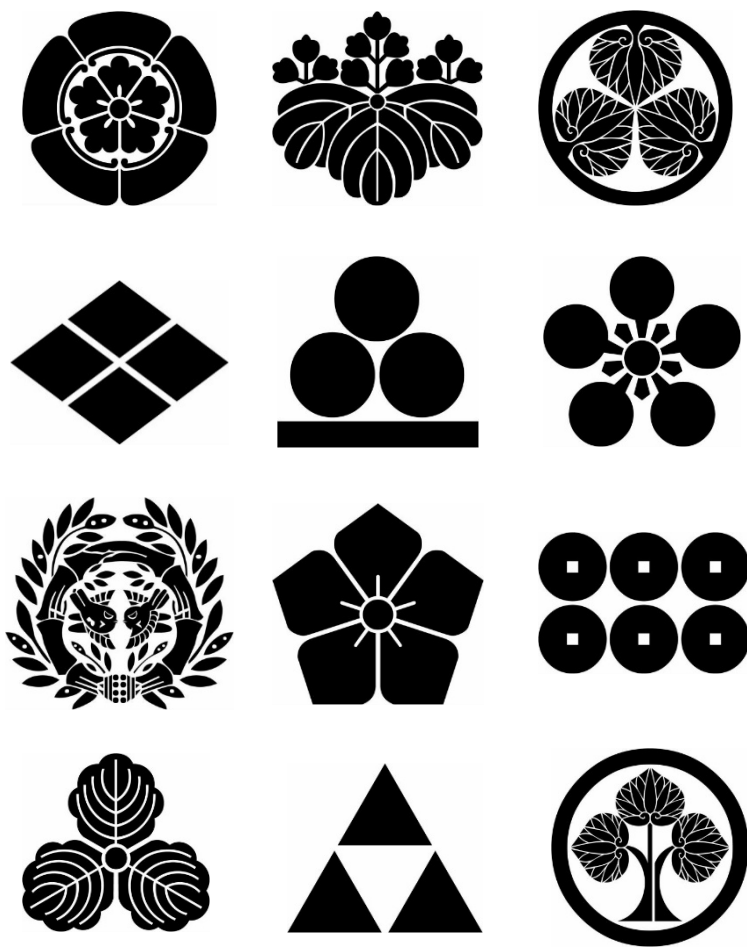


東京大学大学院数理科学研究科

Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



何故か、家紋には
対称性を持つもの
が多いと思いませんか？

視覚において、
人間の脳は
対称性を自然に
見つけるように
出来ていないのでは
ないでしょうか。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1. 対称性とは？

線対称 点対称 回転対称



画像：第一高等学校ホームページより (<http://museum.c.u-tokyo.ac.jp/ICHIKOH/history04.html>)
提供：東京大学駒場博物館

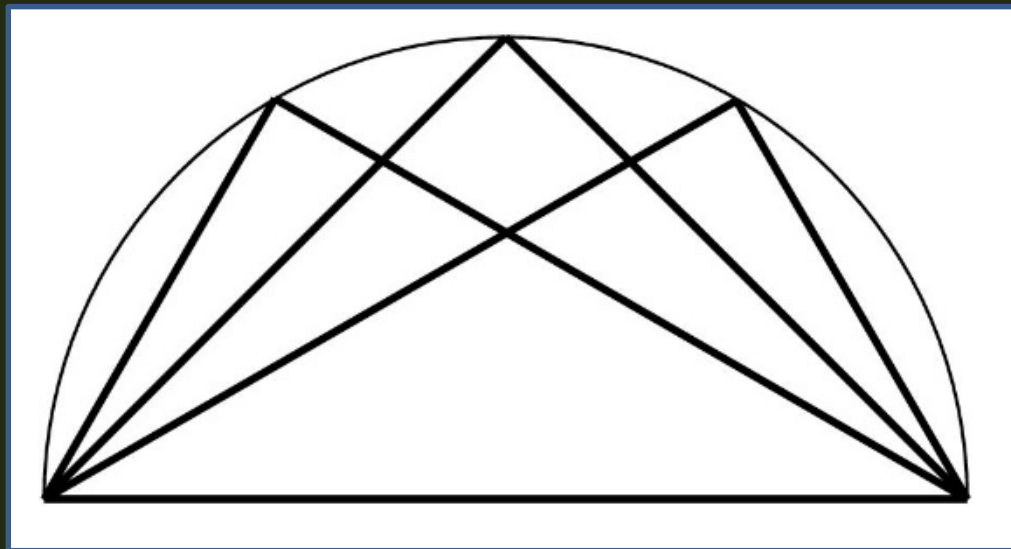
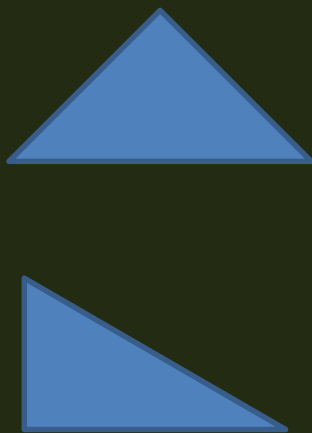


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

この俯瞰講義の金井先生の最初の時間のプラトンの正多面体の話に、「ストイケイア」が出てきました。最初に習う図形の一つです。



「ストイケイア」は、「要素」、「元素」、… です。



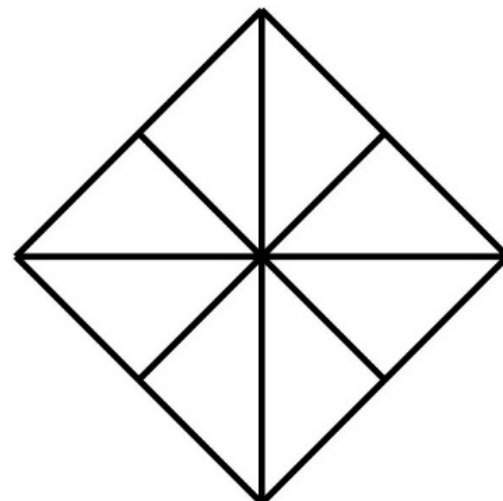
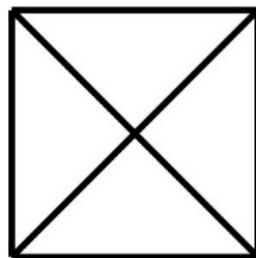
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【問題】 同じ大きさのたくさんのストイケイア
を一つの点(原点 O)の周りに
辺同士をぴったり重ねて、 O を内部に含む
図形を作る。
このような図形は、何通りあるか。

【答】 2通り。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

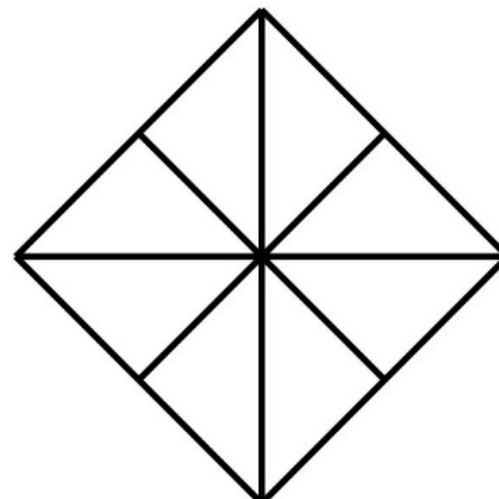
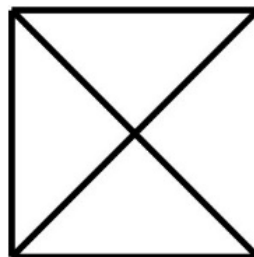


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【問題】 同じ大きさのたくさんのストイケイア
を一つの点(原点 O)の周りに
辺同士をぴったり重ねて、 O を内部に含む
図形を作る。
このような図形は、何通りあるか。

【答】 ~~2~~通り。

【答】 6通り。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

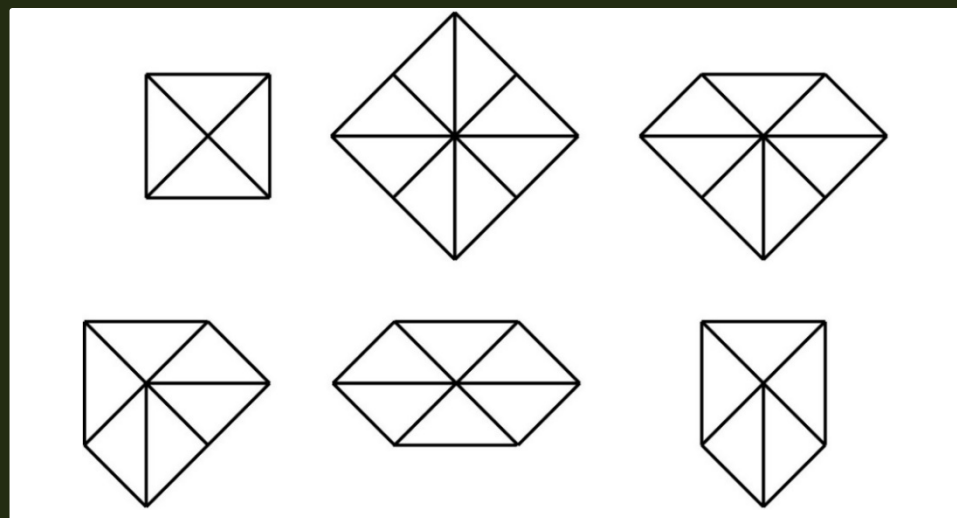


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【問題】 同じ大きさのたくさんのストイケイア
を一つの点(原点 O)の周りに
辺同士をぴったり重ねて、 O を内部に含む
図形を作る。
このような図形は、何通りあるか。

【答】 ~~2~~通り。

【答】 6通り。



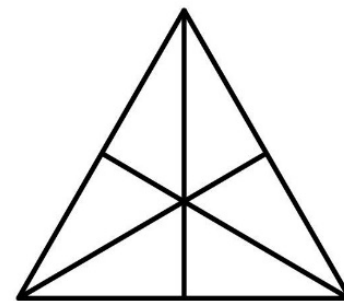
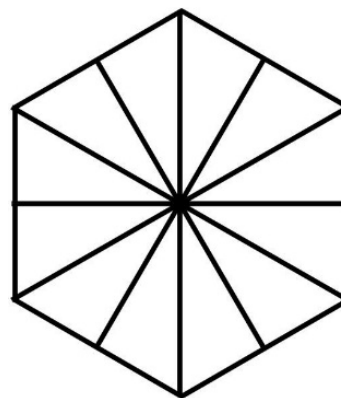
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【問題】 同じ大きさのたくさんのストイケイア
を一つの点(原点 O)の周りに
辺同士をぴったり重ねて、 O を内部に含む
図形を作る。
このような図形は、何通りあるか。

【答】 ?????
正多角形は
2通りだが、
菱形もあるし・・・
たくさんありそうだ。

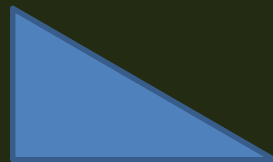


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

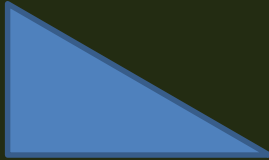


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【演習】 配られた紙で正三角形を折り、それにより紙を分割して(ハサミで切って)12枚以上の同じ大きさのストイケイアを作ってください。



【演習】 これを並べて、対称性を持たない(線対称でも点対称でも回転対称でもない)図形を作ってみよう。

【演習】 先ほどの問題の  で作られる図形を数え上げるにはどうすれば良いでしょうか？



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

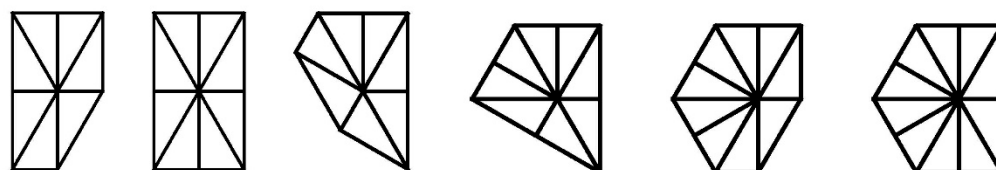
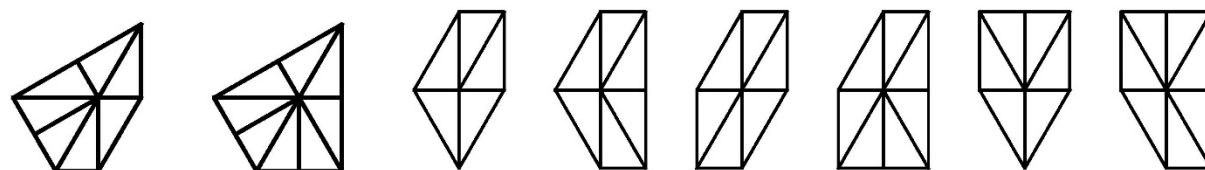
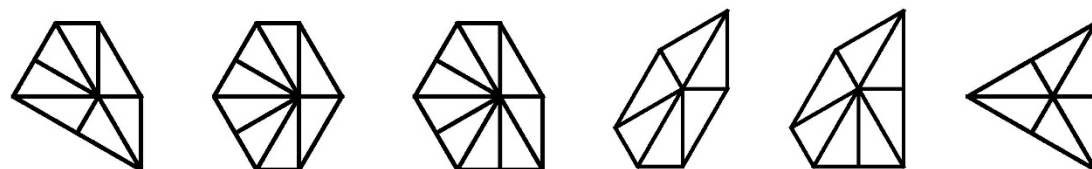
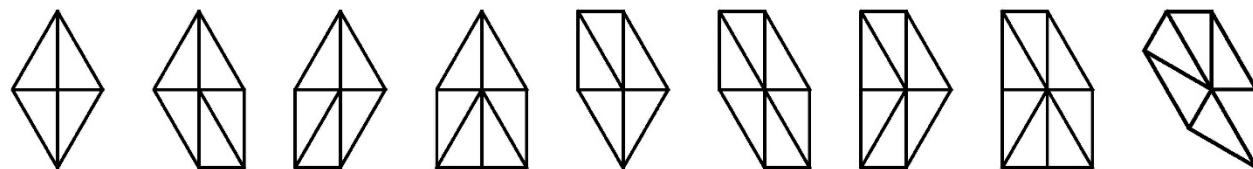
順序をつけて数え挙げてみた。

[illegible][illegible][illegible]

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



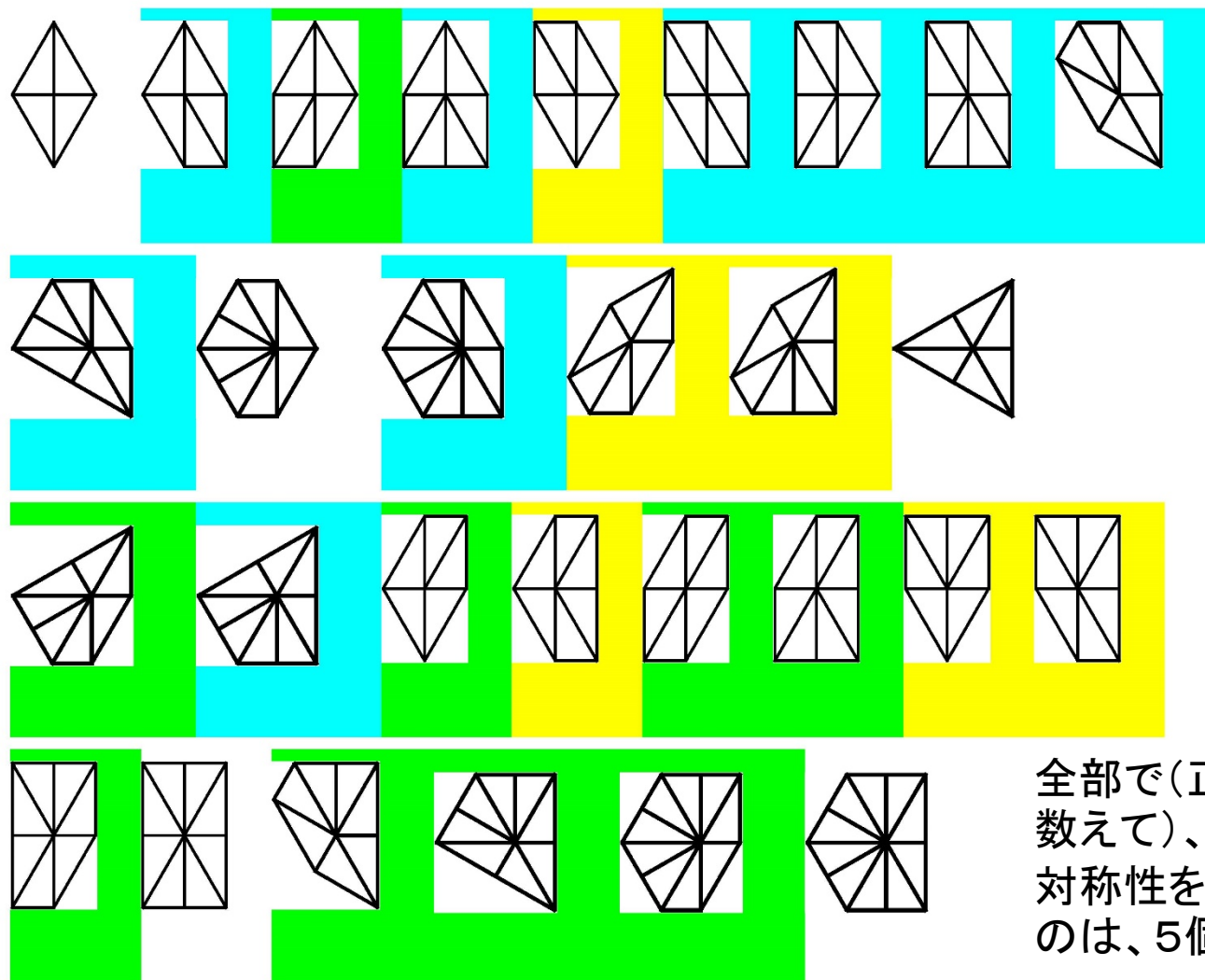
短辺が0から出るものを、
数え上げた。正六角形以
外は入っているが、回転
あるいは裏返しにすると、
同じ図形がある。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO



全部で(正6角形も
数えて)、15個。
対称性を持たないも
のは、5個。



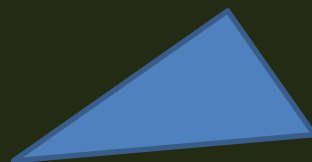
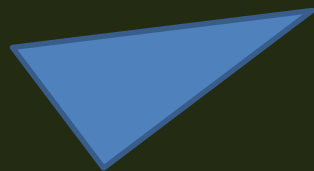
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

平面図形の対称性が、「点対称」、「線対称」、「回転対称」のどれかであるのは、なぜでしょうか？

それを考えるには、対称性を記述する言葉が必要です。



【定義】 2つの図形 F , F' は、移動して重ねることができるときに、合同である。

これは、移動という言葉を知りとして、合同を定義しています。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

2. ユークリッド空間における移動

【定義】 ユークリッド空間 R^3 の図形 F の「移動」とは、写像 $f : F \longrightarrow R^3$ で2つの点の間の距離（2点を結ぶ線分の長さ）を変えない ($\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$) ものである。

ここで、 $\|\vec{v}\|$ はベクトルの大きさ、すなわち、 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対

し、 $\|\vec{v}\| = \sqrt{t_{\vec{v}} \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ である。

【命題】 ユークリッド空間 R^3 の図形 F の「移動」 $f : F \longrightarrow R^3$ は、ユークリッド空間の「移動」 $\hat{f} : R^3 \longrightarrow R^3$ に拡張される。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【命題】 $\vec{b} \in R^3$ とし、 A を ${}^tAA = I$ を満たす 3×3 行列 (直交行列) とする。 $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$ は、線分の長さを保つ。

3次元ではなく2次元だったら、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ であり、

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。このことから、 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ または $A =$

$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ の形となる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【命題】 $\vec{b} \in R^3$ とし、 A を ${}^tAA = I$ を満たす 3×3 行列 (直交行列) とする。 $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$ は、長さを保つ。

命題の証明は難しくありません。

まず、 $\vec{v} \in R^3$ に対し、 $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ である。なぜならば、

$$\|A\vec{v}\|^2 = {}^t(A\vec{v})A\vec{v} = {}^t\vec{v} {}^tAA\vec{v} = {}^t\vec{v} I\vec{v} = {}^t\vec{v} \vec{v} = \|\vec{v}\|^2.$$

長さを保つことは次のように計算される。

$$\begin{aligned} \|(A\vec{x} + \vec{b}) - (A\vec{y} + \vec{b})\| &= \|A\vec{x} - A\vec{y}\| \\ &= \|A(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|. \end{aligned}$$



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

これで、直交行列 A に対し、 $\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b}$ は、空間の移動であることがわかりました。

逆に、空間の移動は、必ずこの形に表されることがわかります。

それを平面で実験してみましょう。

平面の場合は、裏返しにしない移動は平行移動であるか、ある点の周りの回転となります。

配布した紙とその上のトランスペレンシーを少し動かしてみてください。

何か模様が見えますか。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【命題】 ユークリッド空間の移動 $f : R^3 \longrightarrow R^3$ は、回転あるいは裏返し（直交変換）をして平行移動するという形に書かれる： $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$.

2次元の場合の命題から、裏返しにしない2次元の移動は平行移動であるか、ある点の周りの回転となることが示されます。裏返しにする場合は、直線についての裏返しと、その直線に沿う平行移動の合成になることが示されます。

これが、『平面図形の対称性が、点対称、線対称、回転対称のどれかであるのは、なぜでしょうか？』に対する解答

3次元の移動は、以下のいずれかになることも示されます。

- 平行移動、
- ある直線の周りの回転とその直線に沿う平行移動の合成、
- ある平面についての裏返しとその平面に垂直な直線の周りの回転あるいはその平面内の方向への平行移動の合成



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【証明】 移動 $f : R^3 \longrightarrow R^3$ に対し、 $f(\vec{0}) = \vec{b}$ と置き、 $\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) - \vec{b}$ を考えると、 f は長さを保つから「移動」であり、 $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$ である。これを改めて f と置く。

基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ に対し、 $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$ は、長さが 1 の互いに直交するベクトルである。

これらを列ベクトルで表示すると、行列 $A = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{pmatrix}$ について、 ${}^tA A = I$ がわかる。

$g : R^3 \longrightarrow R^3$ を $g(\vec{x}) = {}^tA f(\vec{x})$ で定義すると、原点と基本ベクトルを保つ。すなわち、 $g(\vec{0}) = \vec{0}, g(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, g(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, g(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$ を満たす。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

任意のベクトル $\vec{x}$ に対し、 $\vec{x}$ と $\vec{0}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ の距離は、 g で保たれる。すなわち、 $g(\vec{x})$ は、

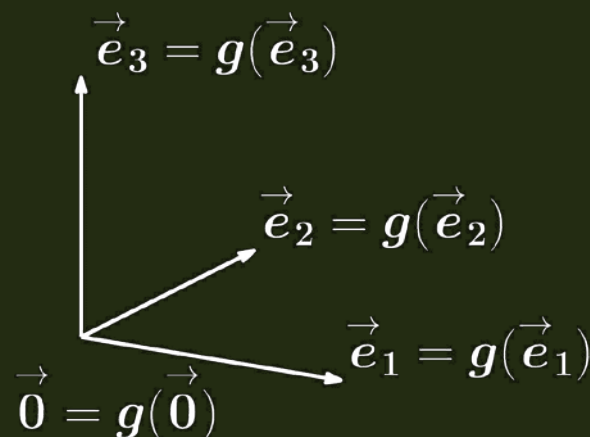
$$\|g(\vec{x})\| = \|g(\vec{x}) - g(\vec{0})\| = \|\vec{x} - \vec{0}\| = \|\vec{x}\|,$$

$$\|g(\vec{x}) - \vec{e}_i\| = \|g(\vec{x}) - g(\vec{e}_i)\| = \|\vec{x} - \vec{e}_i\| \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満たす。

このとき、 $g(\vec{x}) = \vec{x}$, すなわち、 g は恒等写像となる。

これにより、 $f(\vec{x}) = ({}^tA)^{-1}\vec{x} = A\vec{x}$ がわかり、元の f については、 $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ となる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

最後に使った命題は、三角測量の原理です。

それを示す方法を時間のある時に考えてみてください。

ユークリッド空間だけではなく、定負曲率空間(双曲空間)、定正曲率空間(球面)においても成立することです。

方程式を解くという方法でも示されるはずですが、2点が直線を定める、3点が平面を定める、2つの球面の共通部分は円周となるなどの空間の性質と、次元に関する帰納法で示すこともできます。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

3. 対称性を等長変換群で表す

図形 F を F に重ねる移動の全体 $I(F)$ を考える。

(「移動」は「合同変換」(congruence transformation), 「運動」(motion), 「等長写像」(isometry), 「等長変換」(isometric transformation)と呼ばれる。)

$I(F)$ には、 F の恒等写像 id_F , $I(F)$ の元 (要素) f の逆写像 f^{-1} が含まれる。

$I(F)$ の元 f, g に対し、それらの合成 $f \circ g$ が含まれる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

写像の合成 $\circ$ について、 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (結合律),
 $\text{id}_F \circ f = f = f \circ \text{id}_F$, $f^{-1} \circ f = \text{id}_F = f \circ f^{-1}$ が成立するので、 $I(F)$ は、 id_F を単位元、 f^{-1} を f の逆元とする群をなす。

(一般に、結合律を満たす写像 $G \times G \longrightarrow G$ があり、これを
算法として単位元、各元の逆元が存在するような集合 G を群と呼ぶ。)

$I(F)$ を F の等長変換群(isometry group)あるいは合同変換群(congruence group)という。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

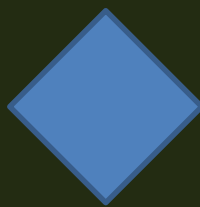


東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【命題】 有界な平面図形の等長変換群は、有限であれば、 C_k または D_{2k} と同型になる。



C_3, D_6



C_4, D_8



C_5, D_{10}



C_6, D_{12}

D_{2k} は正 k 角形の等長変換群であり、 C_k は D_{2k} の元で裏返しにしないものの全体である(あるいは辺に反時計回りに向きを付けたとき、その向きを変えないものの全体である)。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

有界な平面図形の等長変換群は、必ず直交群の部分群になることを示す。

- F が有界であるとは、原点を中心とするある半径の円板に含まれることをいう。
- 図形 F を含む最小半径の閉円板 D を考える。
- このような半径最小の閉円板 D は、ただひとつ存在する。
- 半径最小の閉円板 D が、ただひとつ存在することから、 $I(F) \subset I(D)$ となる。
 $\subset$ は $\subseteq$ と同じ意味で部分集合を表す。
- $I(D)$ は直交変換群である。



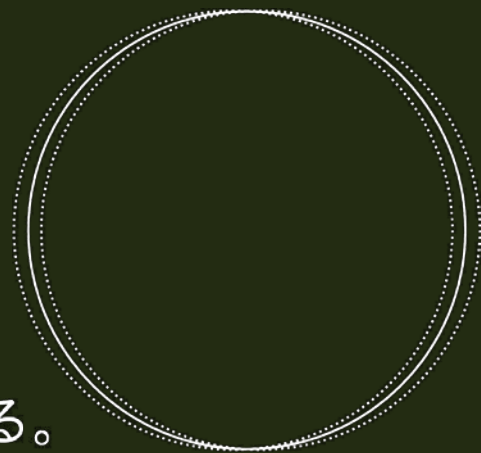
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

以下で「半径最小の閉円板 D が、ただひとつ存在すること」を示すが、そのために実数の性質を使う。

- このような半径最小の円板の一意性は、同じ半径の2つの異なる円板の共通部分は、より小さい半径の円板に含まれることによる。
- 最小の半径の存在は次のような議論による。
- $A = \{r \mid \text{図形 } F \text{ を含む半径 } r \text{ の閉円板が存在する} \}$ とおくと、 A は正の実数の集合で、下限 $r_0 = \inf A$ が存在する。 A の下限 r_0 とは、 A の任意の元 r に対し $r_0 \leq r$ を満たすような実数のなかで最大のものである。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- ここで、実際に半径 r_0 の円板が存在して、 F を含むことを示す必要がある。
- r_0 が下限であることから、任意の正実数 ε に対し、半径 $r_0 + \varepsilon$ (以下) の円板で F を含むものが存在する。
- これにより、任意の自然数 n に対し、中心 p_n , 半径 $r_0 + \frac{1}{n}$ の円板で、 F を含むものがある。
- $\{p_n\}$ は、有界な点列だから、部分列 $\{p_{n_j}\}$ で、収束するものがある。この点列の極限を $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{n_j} = p_\infty$ とする。

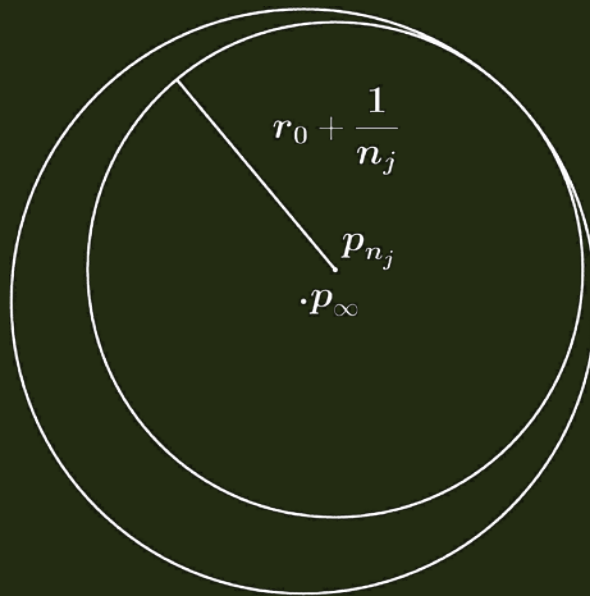


東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

- このとき、 p_∞ を中心とする半径 $r_0 + \frac{1}{n_j} + \|p_{n_j} - p_\infty\|$ の円板は F を含む。



- $j \rightarrow \infty$ のとき、 $r_0 + \frac{1}{n_j} + \|p_{n_j} - p_\infty\| \rightarrow r_0$ だから、 F は、それらの共通部分である p_∞ を中心とする半径 r_0 の円板に含まれる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

【命題】 有界な平面図形の等長変換群は、有限であれば、 C_k または D_{2k} と同型になる。

を示すために

【命題】 有界な平面図形の等長変換群は、円板の等長変換群に含まれる。

ことを示した。

あとは、

【命題】 円板の等長変換群の有限部分群は C_k または D_{2k} と同型になる。

を示せばよい。

これを示すには群が回転を含むときには、正の回転とみて群の元の回転角の最小値を考えるとよい。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

4. 軌道空間

次回のために、少し難しいけれども、群作用の「軌道空間」の説明をします。

C_k , D_{2k} は次のような同じ長さの矢印（向きを持った線分） k 本または $2k$ 本をつないだ1次元の図形の矢印を矢印に移す。

下の図では、 C_{12} , D_{12} が閉じた折線に作用している。



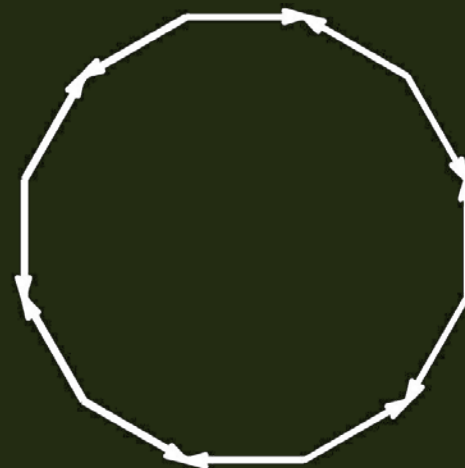
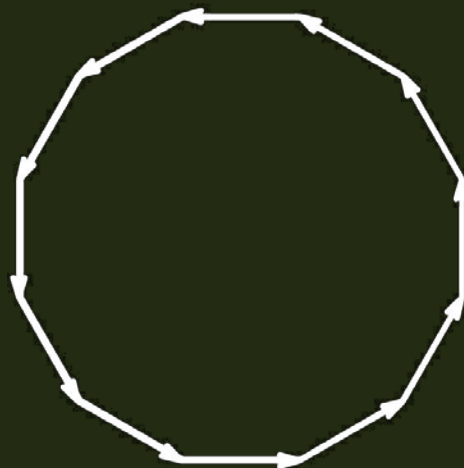
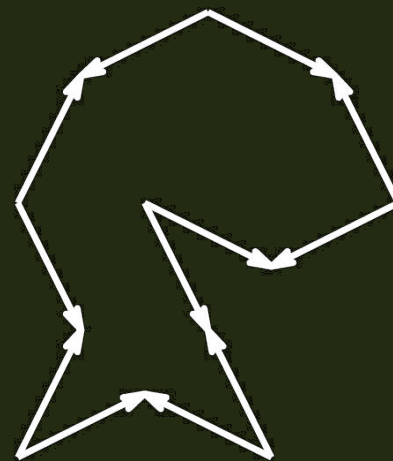
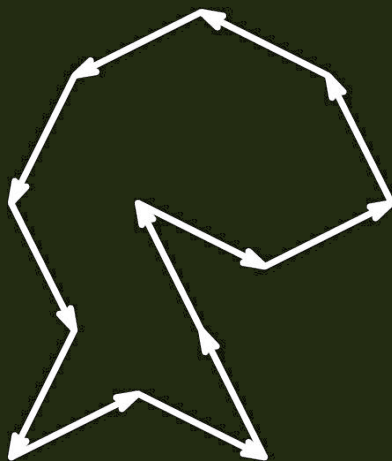
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1つの矢印を決めて、その移る矢印を決めると、 C_{12} , D_{12} の元が1つ定まる。

1つの点の軌道は、矢印の同じ位置にある点となり、軌道の空間は、1つの円周、または、線分となる。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

群 G が円周 S^1 に等長変換群として作用しているとします。

等長変換 $f \in G$ が回転ならば、 f は、円周 S^1 上に固定点は持たず、 S^1 の点 x を含む小円弧は、 $f(x)$ を含む小円弧に移され、これらの小円弧たちは交わりを持ちません。

等長変換 f が円板の中心を通る直線についての対称移動ならば、2つの点が固定されます。固定されない点 x については、 x を含む小円弧で、 $f(x)$ を含む交わらない小円弧に移されるものがあります。固定点を含む小円弧は、折りたたまれます。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

そこで、 G の元で移りあう点をまとめることを考えます。
 G の元で移りあう点を軌道と呼び、軌道を点とする空間を軌道空間と呼びます。

x と y に対し、ある $f \in G$ で、 $y = f(x)$ となる場合には同じ点であると考えるということです。

円周の点 x を固定点とする G の折り返しがあれば、 x は軌道空間の端点に対応します。

円周の点 x が、 G の id_{S^1} を除く等長変換の固定点とならなければ、 x は、軌道空間の内点に対応します。

結論として、円周の有限な等長変換群 G に対しては、軌道空間は円周または線分となります。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

数直線 R への等長変換群 G の作用で、 R/G が、1次元のコンパクトな図形になるならば、次の2つの場合がおきる。

- G は、1つの平行移動 T により生成される群であり、 $C_\infty \cong \mathbb{Z}$ に同型である。

$$\cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

軌道空間 R/C_∞ は円周と同相である。

- G は、2つの対称移動 r_0, r_1 により生成される群であり、 $C_2 * C_2 \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ に同型である。

$$\cdots \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdots$$

軌道空間 $R/(C_2 * C_2)$ は線分と同相である。



東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO



東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO